Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Доценко І.С.

Додаток

до лекційного курсу «Методи математичної фізики». Розділ «Спеціальні функції»

Київ-2012

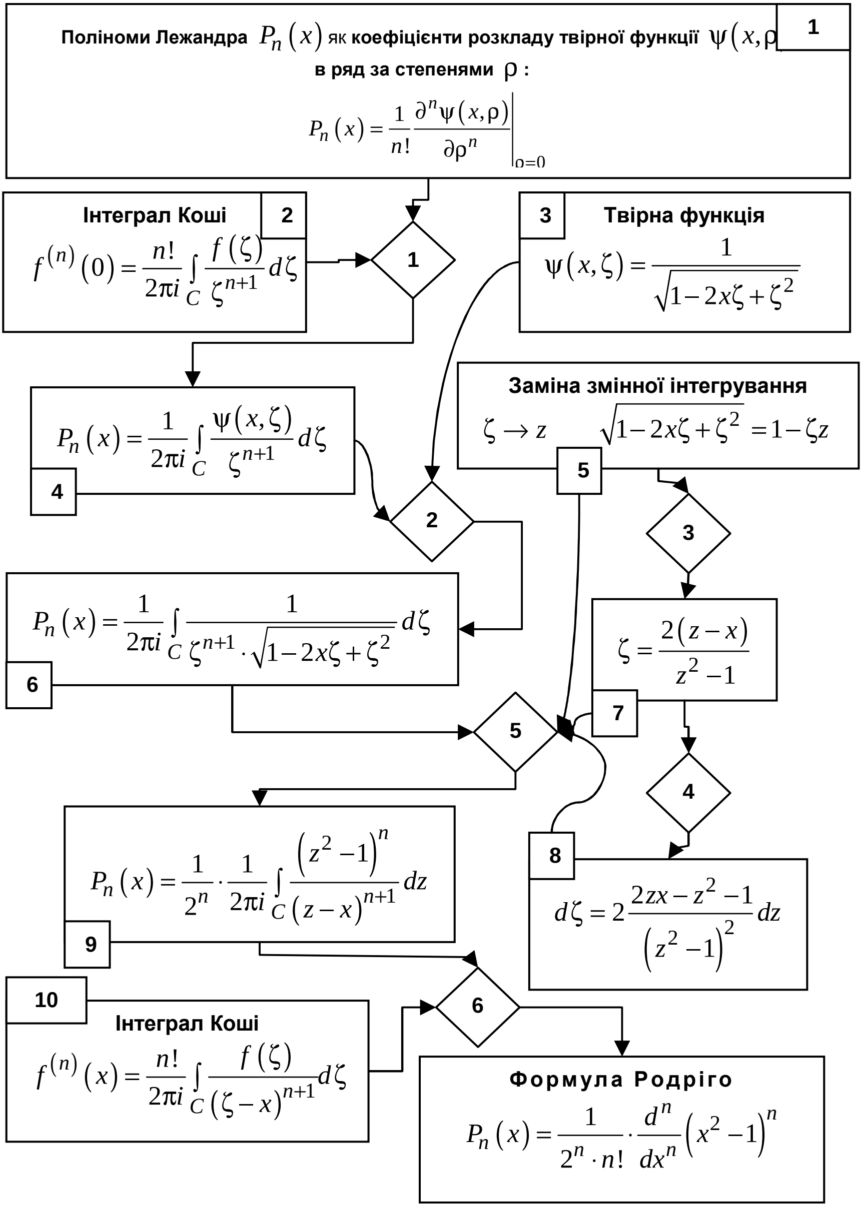
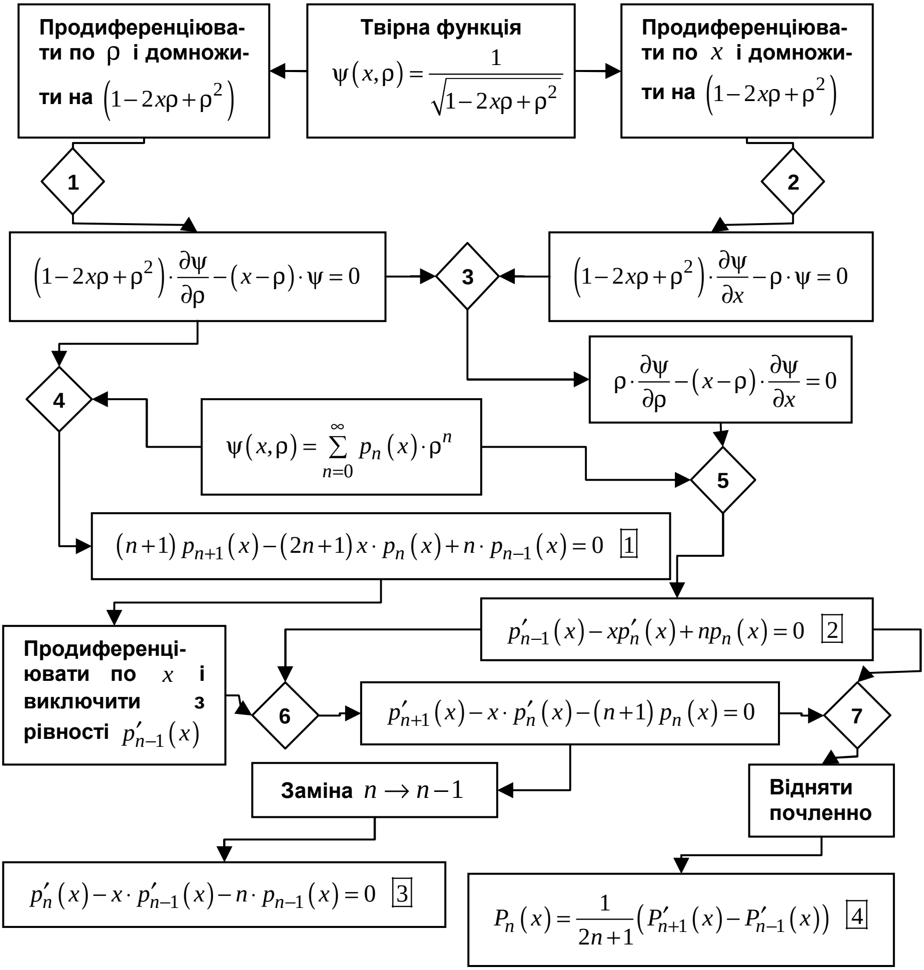


Схема 1. **Процес отримання формули Родріго для поліномів Лежандра**



Рекурентні співвідношення для поліномів Лежандра

$$(n+1)\,p_{n+1}(x)-(2n+1)\,x\cdot p_n(x)+n\cdot p_{n-1}(x)=0 \qquad \boxed{1}$$

$$p'_{n-1}(x)-xp'_n(x)+np_n(x)=0 \qquad \boxed{2}$$

$$p'_n(x)-x\cdot p'_{n-1}(x)-n\cdot p_{n-1}(x)=0 \qquad \boxed{3}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right) \qquad \boxed{4}$$

Схема 2. **Послідовність дій для отримання рекурентних співвідношень для поліномів Лежандра**

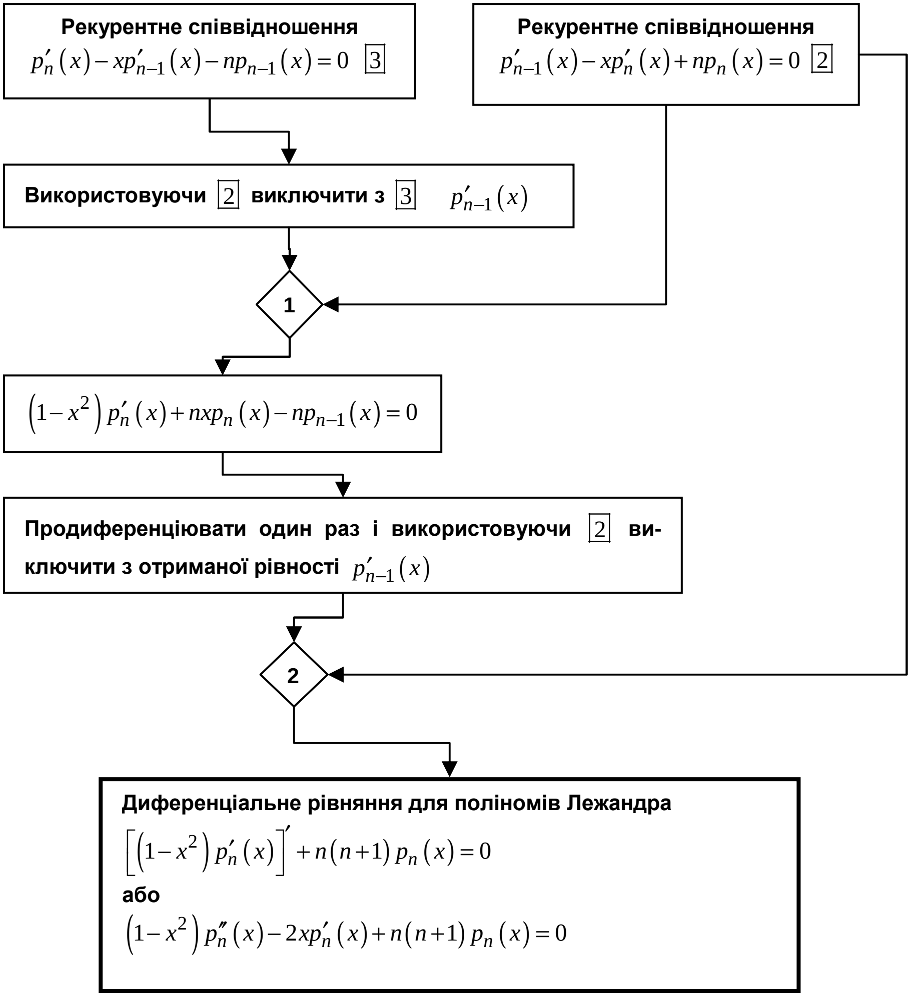


Схема 3. **Процес отримання диференціального рівняння для поліномів Лежандра**

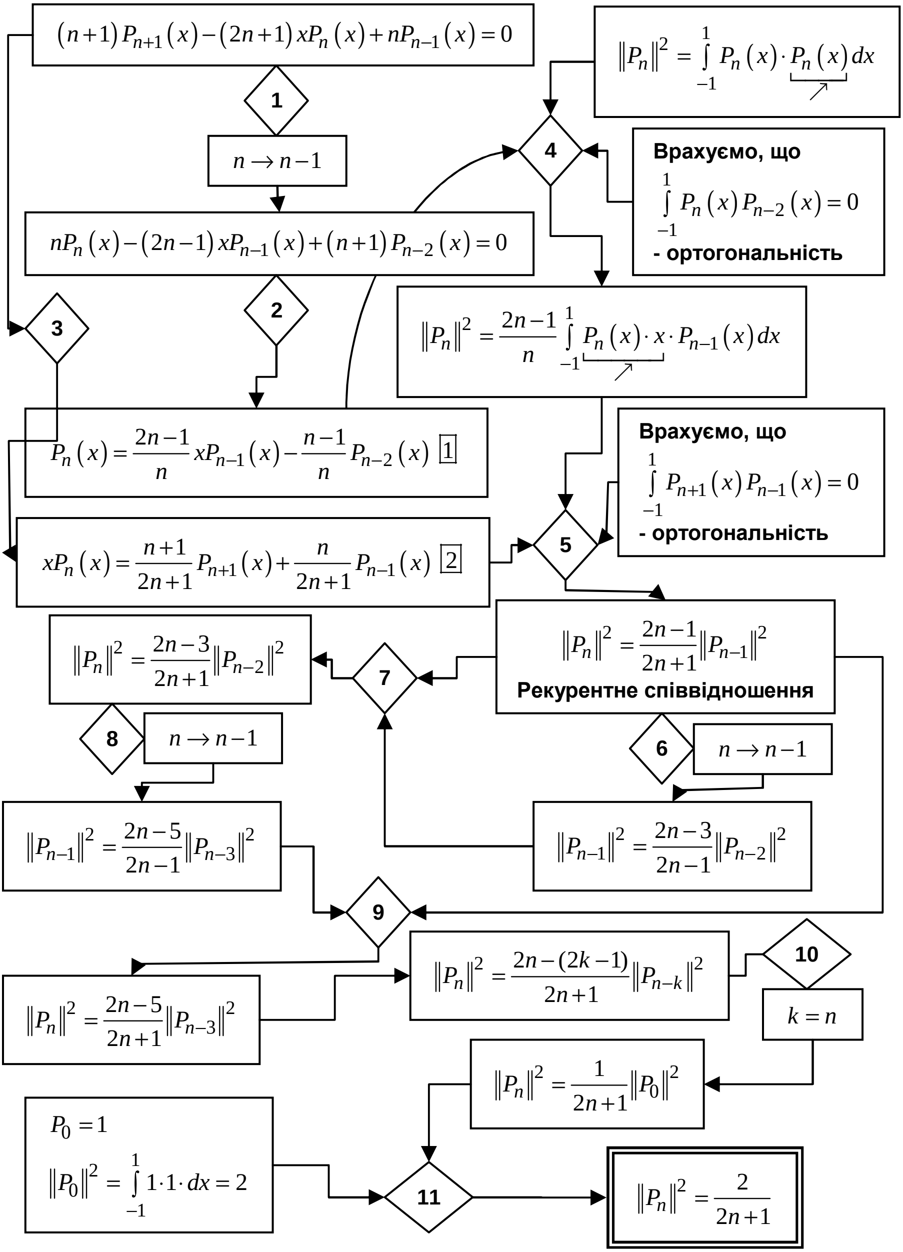


Схема 4. **Послідовність дій для отримання норми поліномів Лежандра**

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}dx$$

Інтеграл Коші для похідної n-го порядку, c - замкнутий контур, що охоплює точку $z=x$

$$f^{(n)}(x)\equiv\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$$

1

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C}\frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Формула Родріго

2

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\left(z^2-1\right)}{(z-x)^{n+1}}dz$$

Інтегральне представлення $P_n(x)$

Вибір контуру у вигляді кола радіуса $R=\sqrt{1-x^2}$ з центром в точці $z=x$:

$z=x+Re^{i\varphi}$,

$dz=iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$0\le\varphi\le2\pi$

3

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi$$

Інтегральне представлення $P_n(x)$

$$\left|x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right|=\sqrt{x^2+\left(1-x^2\right)\sin^2\varphi}$$

$$\left|P_n(x)\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right|^n d\varphi$$

$$x^2+\left(1-x^2\right)\sin^2\varphi\le1$$
$$-1\le x\le1$$

4

$$\left|P_n(x)\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\cdot d\varphi$$
$$-1\le x\le1$$

$$\left|x+i\sqrt{\left(1-x^2\right)\sin\varphi}\right|^n\le1$$
$$-1\le x\le1$$

$$\left|P_n(x)\right|\le1$$
$$-1\le x\le1$$

Схема 5. **Послідовність дій для доведення обмеженості поліномів Лежандра**

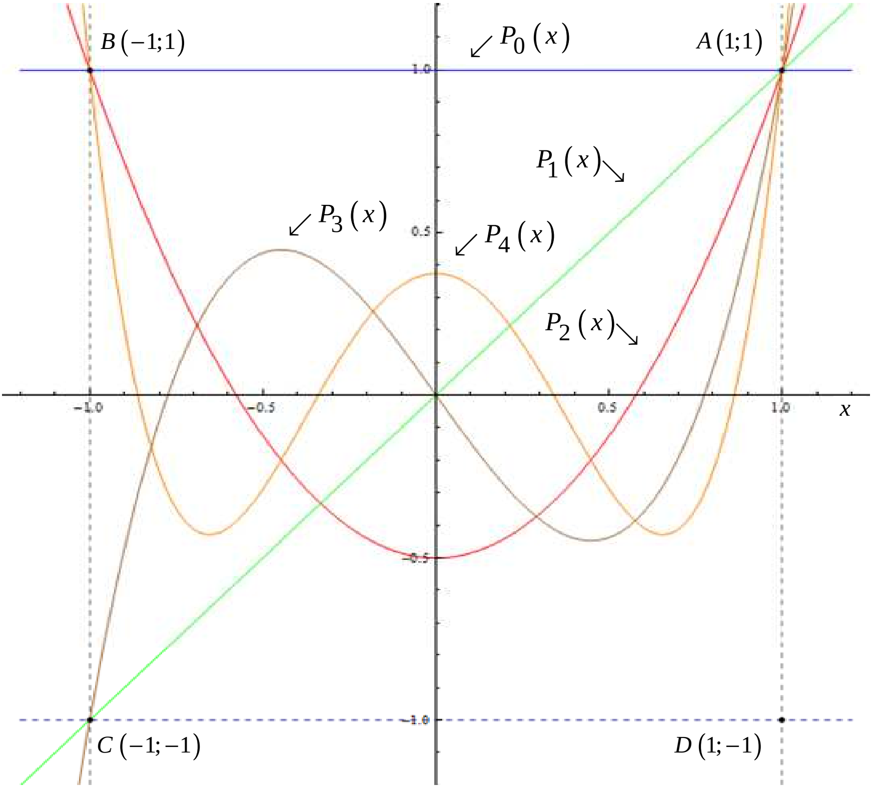


Рис. 4. Графіки поліномів Лежандра $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$.

№	Формули і співвідношення	Пояснення
1.	$\frac{1}{\sqrt{1-2x\rho+\rho^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n,\quad \lvert\rho\rvert<1$	**Розкладання твірної функції** $\psi(x,\rho)=\frac{1}{\sqrt{1-2x\rho+\rho^2}}$ **в степеневий ряд**
2.	$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$	**Формула Родріго**
3.	$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}C_n^k\cdot x^{n-2k}$, $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ **- біноміальні коефіцієнти**	**Явний вигляд поліномів Лежандра**
4.	$\int\limits_{-1}^{1}P_m(x)\cdot P_n(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$ $\int\limits_{0}^{\pi}P_m(\cos\theta)\cdot P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$	**Співвідношення ортогональностей**
5.	$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$ $\boxed{1}$ $P'_{n-1}(x)-xP'_n(x)+nP_n(x)=0$ $\boxed{2}$ $P'_n(x)-xP'_{n-1}(x)-nP_{n-1}(x)=0$ $\boxed{3}$ $P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right)$ $\boxed{4}$	**Рекурентні співвідношення**
6.	$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$	**Властивість парності**
7.	$P_n(1)=1;\qquad P_n(-1)=(-1)^n;$ $P_{2k+1}(0)=0;\quad P_{2k}(0)=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}$	**Значення поліномів** $P_n(x)$ **в окремих точках**
8.	$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(z^2-1\right)}{(z-x)^{n+1}}dz$ $P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi$	**Інтегральні представлення**

9.	$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 2\delta_{n0} = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$ $\int_{0}^{1} P_n(x)\,dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n=2k \\ (-1)^k \dfrac{(2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!}, & n=2k+1 \end{cases}$ $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m<n \\ 0, & m+n=2k+1 \\ \dfrac{2n!}{(2n+1)!!}, & m=n \\ 2\cdot\dfrac{m!}{(m-n)!}\cdot\dfrac{(m-n-1)!!}{(m+n+1)!!}, & m>n,\ m+n=2k \end{cases}$	**Інтеграли з поліномами Лежандра**
10.	$\lvert P_n(x)\rvert \leq 1,\ -1\leq x\leq 1$	**Обмеженість** $P_n(x)$ **при** $-1\leq x\leq 1$
11.	**а) Всі нулі поліномів Лежандра – прості (кратність** $k=1$**);** **б) всі** n **нулів поліномів** $P_n(x)$ **лежать на інтервалі** $-1<x<1$**;** **в) нулі поліномів** $P_{n+1}(x)$ **і** $P_n(x)$ **- чергуються: між двома сусідніми нулями полінома** $P_{n+1}(x)$ **розташований один і тільки один нуль полінома** $P_n(x)$**;** **г) всі поліноми** $P_{2k+1}(x)$ **мають нуль в точці** $x=0$**;** **д) поліноми** $P_n(x)$ **і** $P_{n+1}(x)$ **не дорівнюють нулю в одній і тій самій точці** x_0 **.**	**Властивості нулів поліномів Лежандра**

Таблиця 1. Основні формулі и співвідношення для поліномів Лежандра $P_n(x)$

1 Задача Штурма-Ліувілля

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)y=0$$

$|y(\theta)|<\infty$ **при** $0\le\theta\le\pi$

1

Заміна
$\cos\theta = x$

2

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

$|y(x)|<\infty$ **при** $-1\le x\le 1$

2

3

$$\left(1-x^2\right)u''(x)-2(m+1)xu'(x)+\left[\lambda-m(m+1)\right]u(x)=0$$

Підстановка

$$y(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}u(x)$$

Рівняння для поліномів Лежандра

$$\left(1-x^2\right)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

4

3

Продиференціювати $m\le n$ **разів.**
Використати формулу Лейбніца:

$$(p\cdot q)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k p^{(k)}\cdot q^{(m-k)}$$

$$\left(1-x^2\right)P_n^{(m+2)}(x)-2(m+1)xP_n^{(m+1)}(x)+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]P_n^{(m)}(x)=0$$

4

Введемо позначення

$$P_n^{(m)}(x)\equiv V(x)$$

5

$$\left(1-x^2\right)V''(x)-2(m+1)xV'(x)+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]V(x)=0$$

5

$$\lambda=n(n+1)$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

$$u(x)=\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

6

$$y(x)=P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

P_n^m **- приєднані функції Лежандра**
$m=0,1,\ldots,n$.

Схема 6. Послідовність дій для знаходження явного вигляду приєднаних функцій Лежандра P_n^m

Дивись схему 6

$$\left(1-x^2\right)V''(x)-2(m+1)xV'(x)+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]V(x)=0$$

$$V(x)\equiv\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

1

Домножимо на $\left(1-x^2\right)^m$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m+1}V'(x)\right]=-\left[n(n+1)-m(m+1)\right]\left(1-x^2\right)^mV(x)$$

2

$$V(x)\equiv\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m+1}\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}\right]=-\left[n(n+1)-m(m+1)\right]\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

3

Заміна $m\to m-1$**. Потім врахувати:**

$$n(n+1)-m(m-1)=(n+m)(n-m+1)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]=-\left[(n+m)(n-m+1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}$$

Скалярний добуток

$$\left(P_n^m,P_l^m\right)=\int_{-1}^{1}P_n^m(x)\cdot P_l^m(x)\,dx$$

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

4

$$\left(P_n^m,P_l^m\right)=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_n}{dx^m}\cdot\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}dx$$

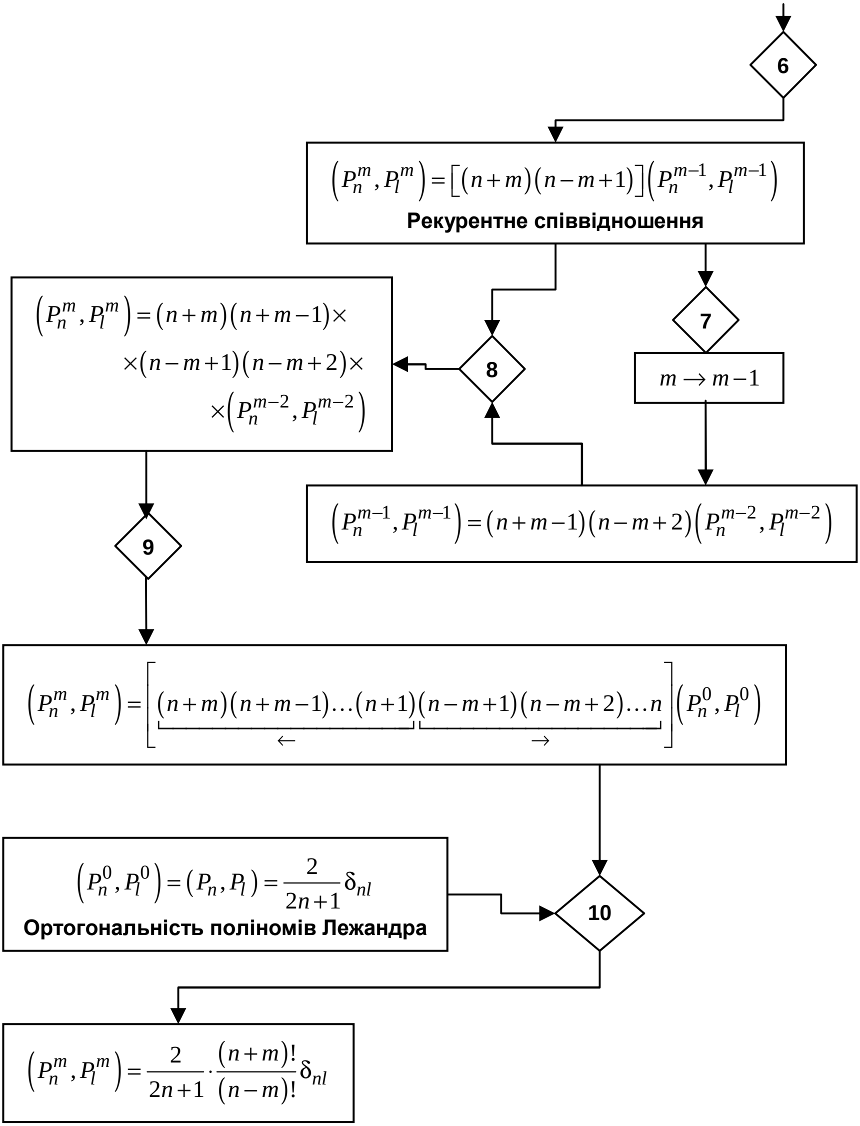
Інтегрування частинами 1 раз. Позаінтеграль-ний член дорівнює нулю.

5

$$\left(P_n^m,P_l^m\right)=-\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_n}{dx^m}\right]\cdot\frac{d^{m-1}P_l}{dx^{m-1}}dx$$

6

Схема 7. Послідовність дій для доведення співвідношення ортогональностей для приєднаних функцій Лежандра $(m\ge 1)$



Продовження схеми 7

	Сферична система координат	Декартова система координат
$l=0$	$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
$l=1$	$Y_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$ $Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ $Y_{1-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$	$Y_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{r}$ $Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$ $Y_{1-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x-iy}{r}$
$l=2$	$Y_{22}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{i2\varphi}$ $Y_{21}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot e^{i\varphi}$ $Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$ $Y_{2-1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot e^{-i\varphi}$ $Y_{2-2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{-i2\varphi}$	$Y_{22}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{x^2-y^2+i2xy}{r^2}$ $Y_{21}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z\left(x+iy\right)}{r^2}$ $Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2}$ $Y_{2-1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z\left(x-iy\right)}{r^2}$ $Y_{2-2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{x^2-y^2-i2xy}{r^2}$
$l=3$	$Y_{33}=-\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta e^{i3\varphi}$ $Y_{32}=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\cos\theta\sin^2\theta e^{i2\varphi}$ $Y_{31}=-\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\left(5\cos^2\theta-1\right)\sin\theta e^{i\varphi}$ $Y_{30}=\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\left(5\cos^2\theta-3\right)\cos\theta$ $Y_{3-1}=\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\left(5\cos^2\theta-1\right)\sin\theta e^{-i\varphi}$ $Y_{3-2}=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\cos\theta\sin^2\theta e^{-i2\varphi}$ $Y_{3-3}=\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta e^{-i3\varphi}$	$Y_{33}=-\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\frac{\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3xy^2-y^3\right)}{r^3}$ $Y_{32}=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\frac{z\left(x^2-y^2+i2xy\right)}{r^3}$ $Y_{31}=-\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\frac{\left(4z^2-x^2-y^2\right)\left(x+iy\right)}{r^3}$ $Y_{30}=\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\frac{z\left(2z^2-3x^2-3y^2\right)}{r^3}$ $Y_{3-1}=\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\frac{\left(4z^2-x^2-y^2\right)\left(x-iy\right)}{r^3}$ $Y_{3-2}=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\frac{z\left(x^2-y^2-i2xy\right)}{r^3}$ $Y_{3-3}=\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\frac{\left(x^3-3xy^2\right)-i\left(3xy^2-y^3\right)}{r^3}$

Таблиця 2. Явний вигляд сферичних функцій в сферичній і декартовій системах координат.

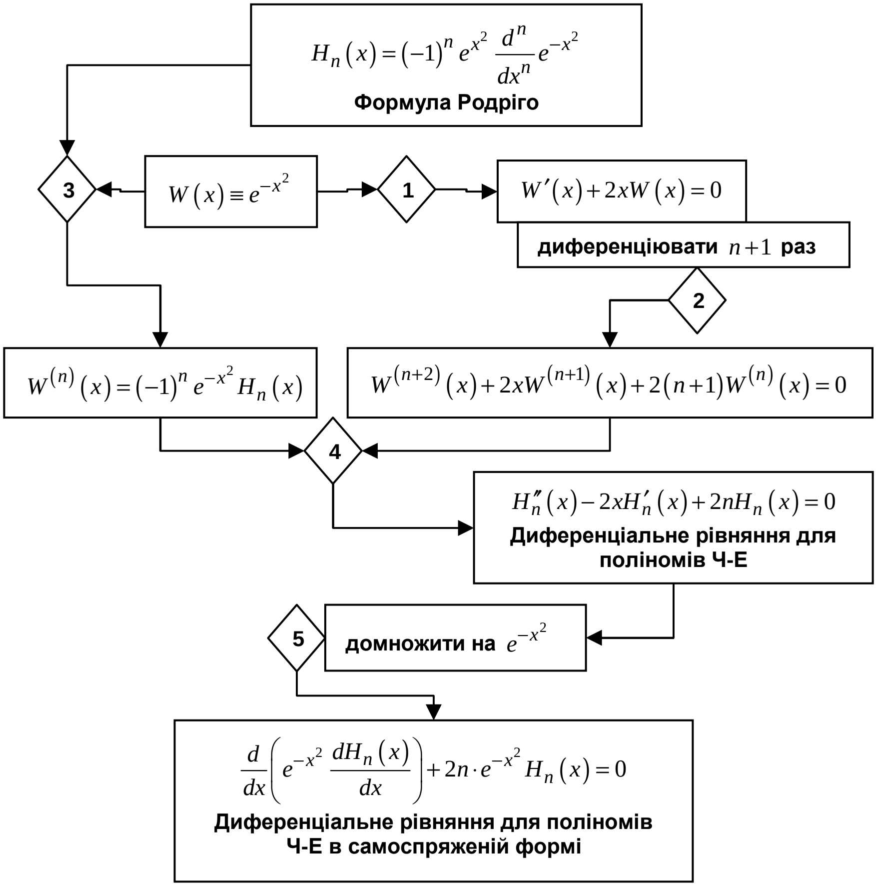


Схема 8. **Послідовність дій для отримання диференціального рівняння для поліномів Чебишева-Ерміта**

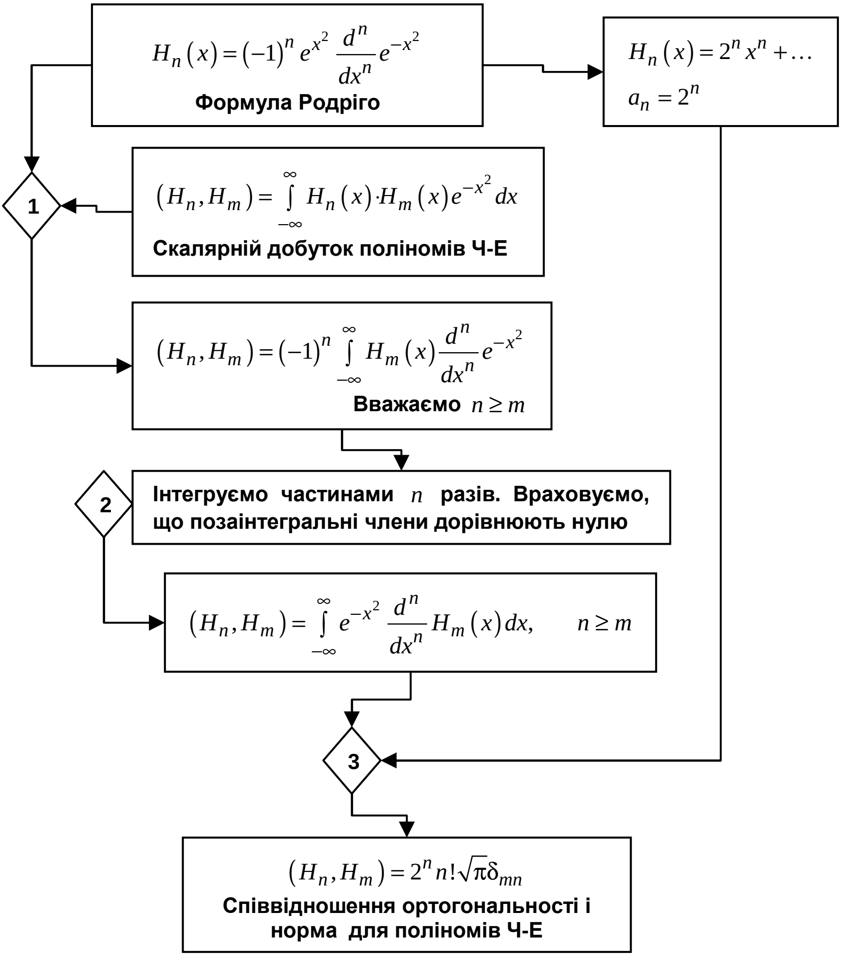


Схема 9. **Послідовність дій для отримання співвідношення ортогональності і норми для поліномів Чебишева-Ерміта**

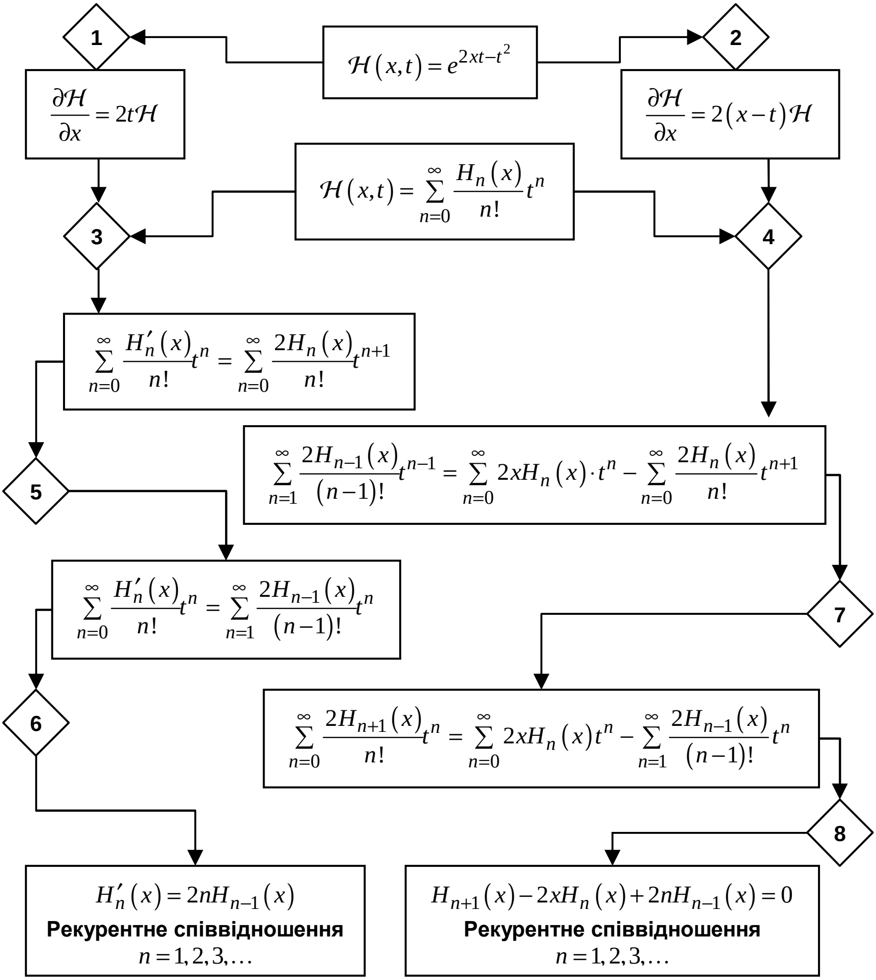


Схема 10. **Послідовність дій для отримання рекурентних співвідношень для поліномів Чебишева-Ерміта**

Розкладання твірної функції в степеневий ряд

$$\mathcal{L}^{\alpha}(x,t)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\cdot e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)\cdot t^n,\ \alpha>-1$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathcal{L}^{\alpha}(x,t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\mathcal{L}^{\alpha}(x,z)}{z^{n+1}}dz$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_C\frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}\cdot z^{n+1}}dz$$

Заміна: $z\to\xi$

$$1-z=\frac{x}{\xi}$$

$$z=\frac{\xi-x}{x}$$

$$dz=\frac{x}{\xi^2}d\xi$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\cdot\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\xi^{n+\alpha}e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}}d\xi$$

Формула Коші:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{n+1}}d\xi$$

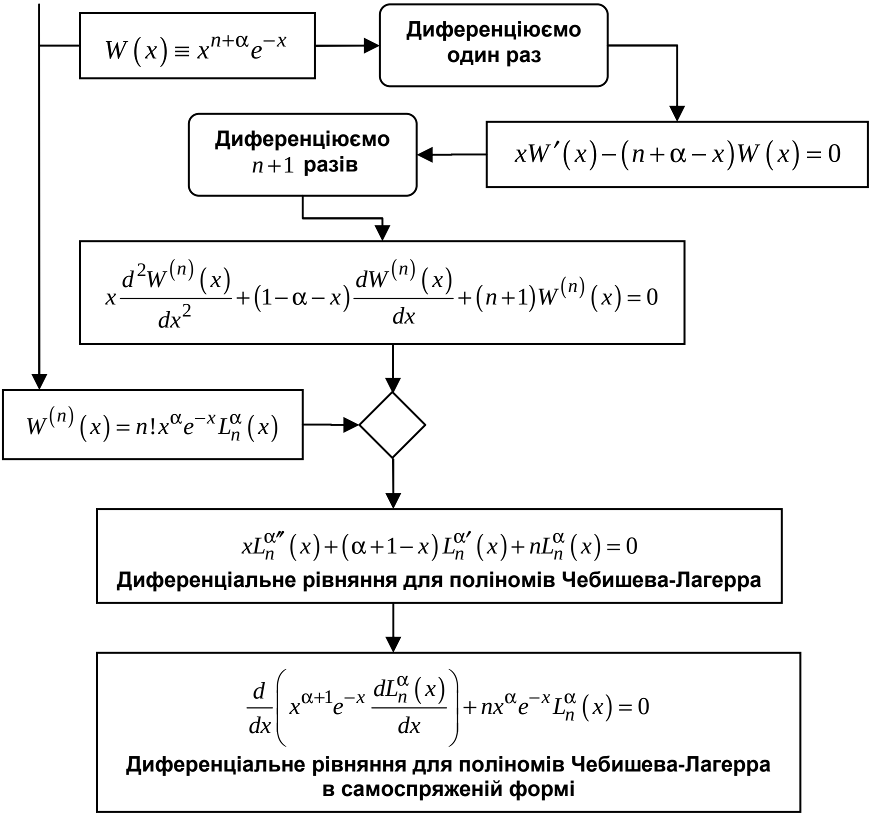
$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)$$

Формула Родріго

$$L_n^{\alpha}(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}$$

Схема 11. **Розкладання твірної функції в степеневий ряд, формула Родріго та диференціальне рівняння для поліномів Чебишева-Лагерра.**



Продовження схеми 11.

$$\left(L_n^{\alpha}, L_m^{\alpha}\right) = \int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, L_m^{\alpha}(x)\, x^{\alpha} e^{-x} dx$$

Скалярний добуток поліномів Чебишева-Лагерра

$\alpha > -1$

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)$$

Формула Родріго

Вважаємо $n > m$

$$\left(L_n^{\alpha}, L_m^{\alpha}\right) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} L_m^{\alpha}(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right) dx$$

Інтегруємо частинами, вважаючи:

$$u = L_m^{\alpha}(x)$$

$$d\upsilon = \frac{d^n\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)}{dx^n}$$

$$\upsilon = \frac{d^{n-1}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)}{dx^{n-1}}$$

$$\left(L_n^{\alpha}, L_m^{\alpha}\right) = \frac{1}{n!}\left\{ \underbrace{L_m^{\alpha}(x) \cdot \left.\frac{d^{n-1}\left(x^{n+\alpha}\right) e^{-x}}{dx^n}\right|_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} \frac{dL_m^{\alpha}(x)}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)}{dx^{n-1}} dx \right\}$$

Результат n **-кратного інтегрування частинами** $\left(L_n^{\alpha}, L_m^{\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} L_m^{\alpha}(x)\, dx$

$$L_m^{\alpha}(x) = a_m x^n + a_{m-1} x^{n-1} + \ldots$$

$$\left(L_n^{\alpha}, L_m^{\alpha}\right) = 0, \quad m < n$$

Оскільки в скалярний добуток m, n **входять симетрично, то** $\left(L_n^{\alpha}, L_m^{\alpha}\right) = 0$ **і при** $m > n$

$m = n$, $a_n = (-1)^n / n!$

$$\|L_n\|^2 = \left(L_n^{\alpha}, L_n^{\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n}\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\right) dx,$$

$$\|L_n\|^2 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^{(n+\alpha+1)-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

Остаточно: співвідношення ортогональності і норми

$$\left(L_n, L_m\right) = \int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, L_m^{\alpha}(x)\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}$$

Схема 12. **Співвідношення ортогональностей і норма поліномів Чебишева-Лагерра.**

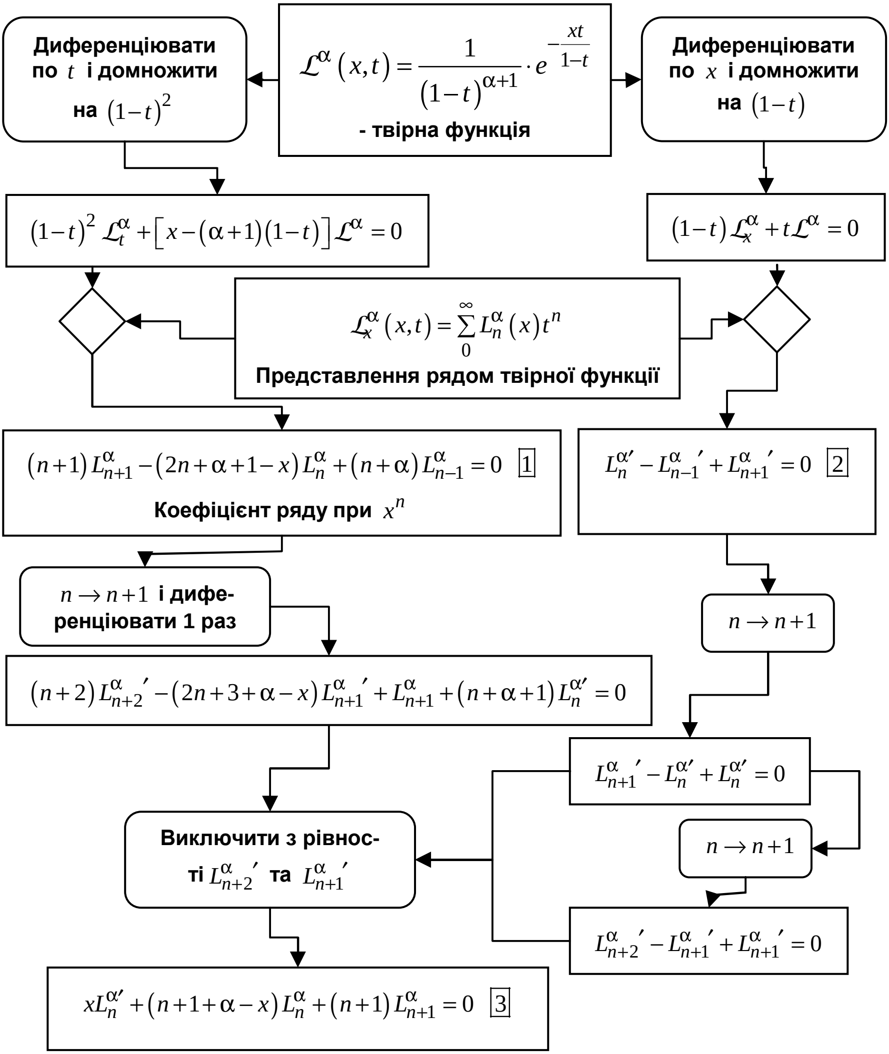
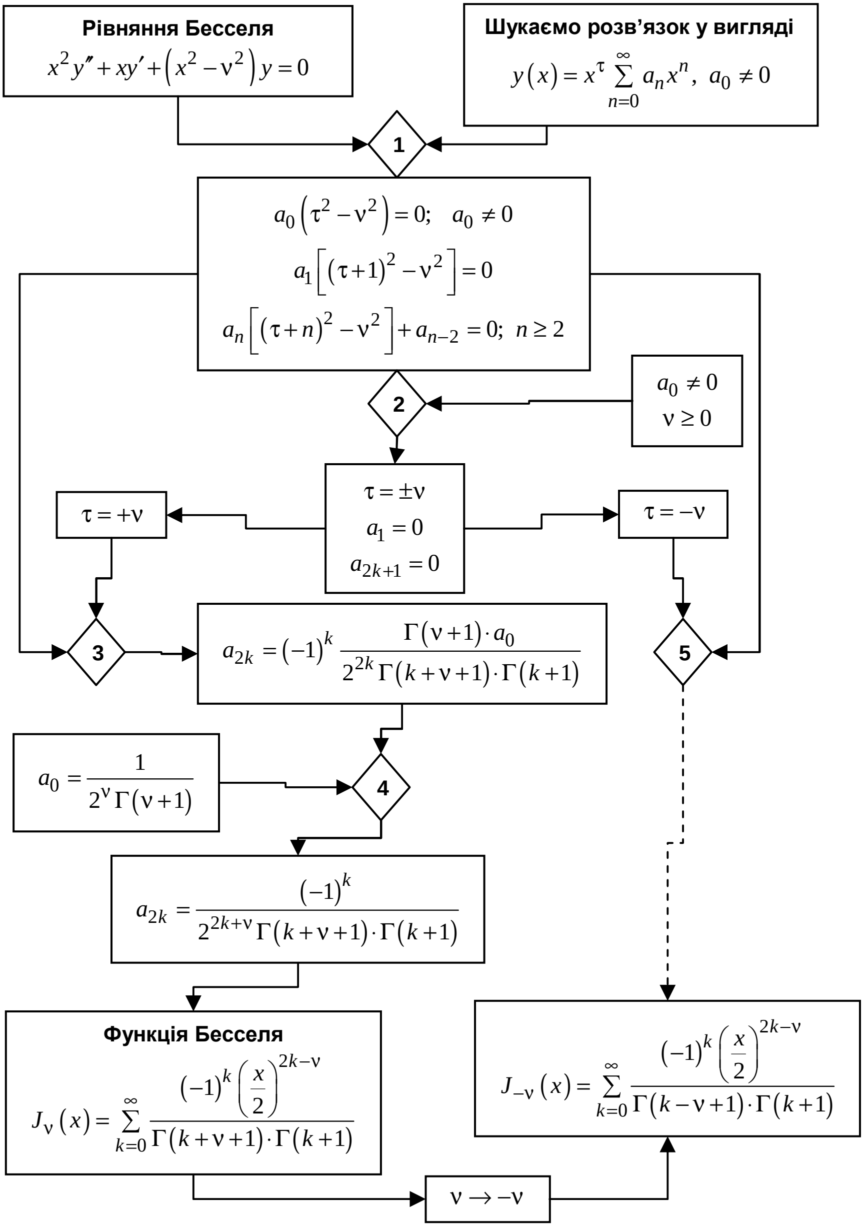


Схема 13. **Рекурентні співвідношення для поліномів Чебишева-Лагерра.**



Рівняння Бесселя
$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$
Шукаємо розв'язок у вигляді
$y(x) = x^{\tau} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_0 \neq 0$
1
$a_0\left(\tau^2 - \nu^2\right) = 0; \quad a_0 \neq 0$
$a_1\left[(\tau+1)^2 - \nu^2\right] = 0$
$a_n\left[(\tau+n)^2 - \nu^2\right] + a_{n-2} = 0;\ n \geq 2$
2
$a_0 \neq 0$
$\nu \geq 0$
$\tau = \pm\nu$
$a_1 = 0$
$a_{2k+1} = 0$
$\tau = +\nu$
$\tau = -\nu$
3
$a_{2k} = (-1)^k \dfrac{\Gamma(\nu+1)\cdot a_0}{2^{2k}\Gamma(k+\nu+1)\cdot\Gamma(k+1)}$
5
$a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$
4
$a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+\nu+1)\cdot\Gamma(k+1)}$
Функція Бесселя
$J_{\nu}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\cdot\Gamma(k+1)}$
$J_{-\nu}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)\cdot\Gamma(k+1)}$
$\nu \to -\nu$

Схема Б.1 Знаходження розв'язків рівняння Бесселя у вигляді степеневого ряду

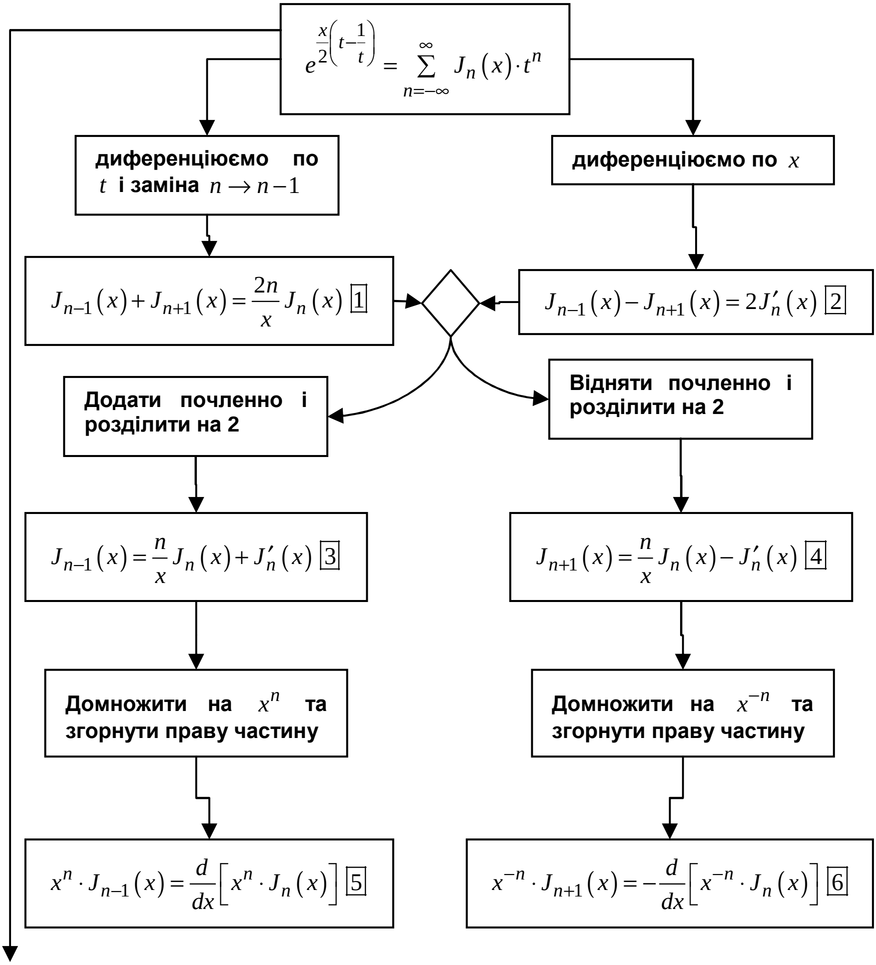
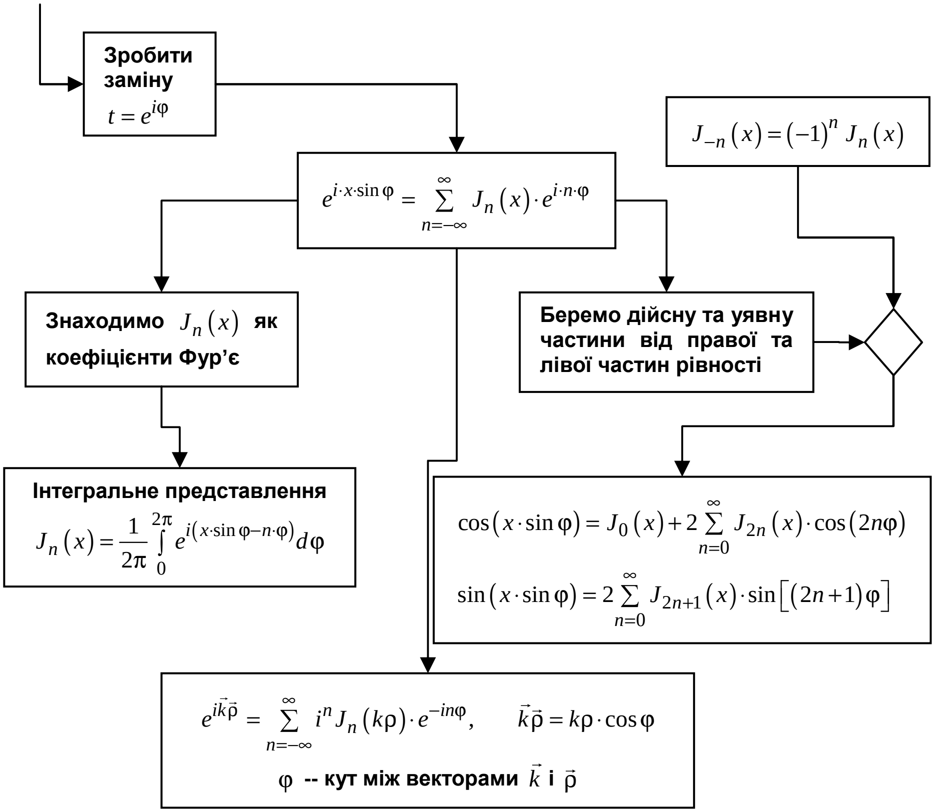


Схема Б.2 Рекурентні співвідношення та інтегральні представлення для функції Бесселя



Продовження схеми Б.2

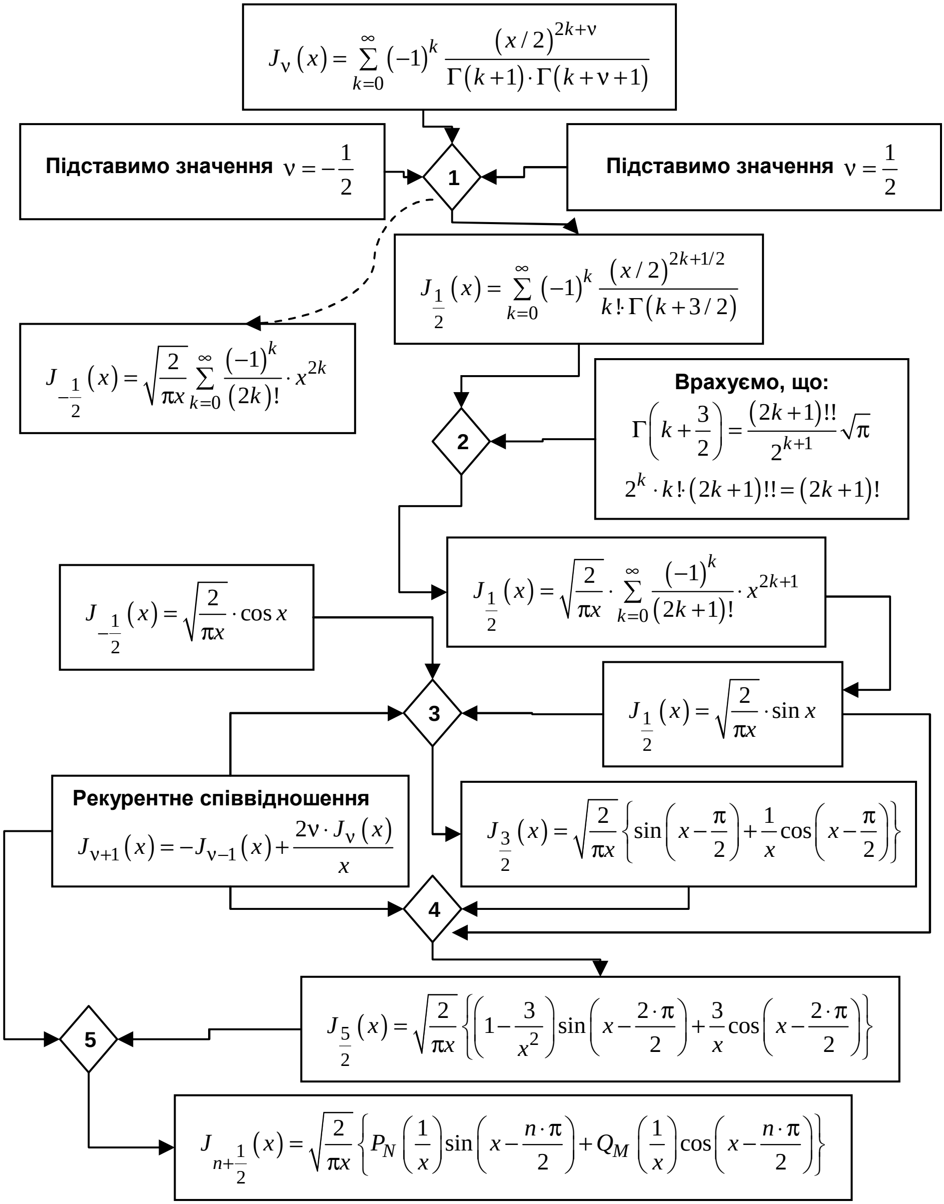


Схема Б.3 Виведення формул, в яких функції Бесселя $J_{n+1/2}(x)$ напівцілого порядку виражаються через елементарні функції

Основні формули

Д.1	$\left\{\begin{aligned} & x^2 y'' + x^2 y' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \\ & y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \\ & \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \\ & \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0 \end{aligned}\right.$	рівняння Бесселя у різних формах
Д.2	$J_\nu(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1) \cdot \Gamma(k+1)}$	ряд для функцій Бесселя
Д.3	$\left\{\begin{aligned} & \int\limits_0^l J_\nu\left(\frac{\alpha}{l} x\right) \cdot J_\nu\left(\frac{\beta}{l} x\right) \cdot x \cdot dx = \frac{l^2}{2}\left\{J_\nu'^2(\alpha) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right) \cdot J_\nu^2(\alpha)\right\} \cdot \delta_{\alpha\beta} \\ & \nu > -1,\ \alpha \text{ і } \beta \textit{ корені одного з таких рівнянь} \\ & J_\nu(z) = 0 \\ & J_\nu'(z) = 0 \\ & z \cdot J_\nu'(z) + h \cdot J_\nu(z) = 0 \end{aligned}\right.$ співвідношення ортогональності для функції Бесселя	
Д.4	$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot t^n$	розкладання в ряд твірної функції
Д.5	$\left\{\begin{aligned} & J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \\ & J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \end{aligned}\right.$	парність та лінійна залежність при цілих $\nu = n$
Д.6	$\left\{\begin{aligned} & \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) = 1 \\ & \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\lvert J_n(x) \le 1 \right\rvert \end{aligned}\right.$	

Д.7	$\begin{cases} J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x) \\ J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_\nu(x) \\ x^\nu\cdot J_{\nu-1}(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^\nu\cdot J_\nu(x)\right] \\ x^{-\nu}\cdot J_{\nu+1}(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^{-\nu}\cdot J_\nu(x)\right] \end{cases}$	рекурентні спів-відношення для функцій Бесселя
Д.8	$J_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(x\cdot\sin x-n\cdot\varphi)}d\varphi$	інтегральне пред-ставлення для функцій Бесселя
Д.9	$\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cdot\sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cdot\cos x \\ J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{x}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} \end{cases}$	функції Бесселя напівцілого по-рядку
Д.10	$\begin{cases} N_\nu(x)=\dfrac{\cos(\pi\nu)\cdot J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \\ N_\nu(x)=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}-(-1)^\nu\dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \end{cases}$	функції Неймана (означення)
Д.11	$N_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n+1}J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(x)$	функції Неймана напівцілого по-рядку
Д.12	$H_\nu^{(1,2)}(x)=J_\nu(x)\pm i\cdot N_\nu(x)$	функції Ганкеля

Д.13	$\begin{cases} J_\nu(x) \sim x^\nu & \nu \ge 0 \\ N_\nu(x) \sim \dfrac{1}{x^\nu} & \nu > 0 \\ N_0(x) \sim \ln\dfrac{1}{x} & \nu = 0 \\ H_\nu^{(1,2)}(x) \sim \dfrac{1}{x^\nu} & \nu > 0 \\ H_0^{(1,2)}(x) \sim \ln\dfrac{1}{x} & \nu = 0 \end{cases}$	асимптотичний порядок циліндричних функцій при малих значеннях аргументу ($x \ll 1$)
Д.14	$\begin{cases} J_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \dfrac{\pi\nu}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \\ N_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \dfrac{\pi\nu}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \\ H_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cdot e^{\pm i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \end{cases}$	асимптотичний порядок циліндричних функцій при великих значеннях аргументу ($x \gg 1$)
Д.15	$x^2 y''(x) + xy'(x) - \left(x^2 + \nu^2\right) y(x) = 0$	модифіковане рівняння Бесселя
Д.16	$\begin{cases} I_\nu(x) = i^{-\nu} \cdot J_\nu(ix) \\ I_\nu(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(x/2\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+\nu+1)} \end{cases}$	функції Бесселя уявного аргументу
Д.17	$\begin{cases} K_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right], \quad \nu \ne 0 \\ K_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2}\left[\left(\dfrac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - \left(\dfrac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right] \end{cases}$	функції Макдональда
Д.18	$e^{\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) \cdot t^n$	Розкладання в ряд твірної функції

Д.19	$\begin{cases} \begin{cases} I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} I_\nu(x) \\ I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x) \end{cases} \\ \begin{cases} K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} K_\nu(x) \\ K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x) \end{cases} \end{cases}$	рекурентні співвідношення для функцій Бесселя уявного аргументу і функцій Макдональда
Д.20	$\begin{cases} I_\nu(x) \sim x^\nu, & \nu \ge 0 \\ K_\nu(x) \sim x^{-\nu}, & \nu > 0 \\ K_0(x) \sim \ln\left(\dfrac{1}{x}\right), & \nu = 0 \end{cases}$	асимптотичний порядок функцій Бесселя уявного аргументу і функцій Макдональда при $x \ll 1$
Д.21	$\begin{cases} I_\nu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left\{1 + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\} \\ K_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} e^{-x} \left\{1 + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\} \end{cases}$	асимптотичний порядок функцій Бесселя уявного аргументу і функцій Макдональда при $x \gg 1$

Звідна таблиця спеціальних функцій в курсі «Методи математичної фізики»

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">Спеціальні функції, що є розв'язками рівняння типу
$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda\rho y=0$, $a<x<b,\ k(x)\geq 0,\ \rho(x)>0,\ q(x)\geq 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>Спеціальна функція</td><td>Вид і назва рівняння</td><td>$k(x)$</td><td>$p(x)$ вагова функ-ція</td><td>$q(x)$</td><td>(a,b) - інтервал ортогона-льності</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>$J_\nu(x)$ - функція Бесселя</td><td rowspan="4">$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0$
Рівняння Бесселя</td><td rowspan="4">x</td><td rowspan="4">x</td><td rowspan="4">$\frac{\nu^2}{x}$</td><td>$(0,l)$; $l>0$ - довільне число</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$N_\nu(x)$ - функ-ція Неймана</td><td>—</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\mathcal{H}^{(1)}(x)$ - фун-кція Ганкеля 1 роду</td><td>—</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$\mathcal{H}^{(2)}(x)$ - фун-кція Ганкеля 2 роду</td><td>—</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$P_n(x)$ - функ-ція Лежандра</td><td>$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0$
Рівняння Лежандра</td><td>$1-x^2$</td><td>1</td><td>0</td><td>$(-1,1)$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>$P_n^m(x)$ - приє-днані функції Лежандра</td><td>$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]-\frac{m^2}{1-x^2}y+n(n+1)y=0$
Рівняння для приєднаних функ-цій Лежандра</td><td>$1-x^2$</td><td>1</td><td>$\frac{m^2}{1-x^2}$</td><td>$(-1,1)$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$H_n(x)$ - полі-номи Чебише-ва-Ерміта</td><td>$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+2ne^{-x^2}y=0$
Рівняння Чебишева-Ерміта</td><td>e^{-x^2}</td><td>e^{-x^2}</td><td>0</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>$L_n(x)$ - полі-номи Лагерра</td><td>$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+ne^{-x}y=0$
Рівняння Чебишева-Лагерра</td><td>xe^{-x}</td><td>e^{-x}</td><td>0</td><td>$(0,\infty)$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>$L_n^\alpha(x)$ - уза-гальнені полі-номи Чебише-ва-Лагерра</td><td>$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+nx^\alpha e^{-x}y=0$
Узагальнене рівняння Чебише-ва-Лагерра. $\alpha>-1$</td><td>$x^{\alpha+1}\times$ $\times e^{-x}$</td><td>$x^\alpha e^{-x}$</td><td>0</td><td>$(0,\infty)$</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>$T_n(x)$ - полі-номи Чебишева 1 роду</td><td>$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}y=0$</td><td>$\sqrt{1-x^2}$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>0</td><td>$(-1,1)$</td></tr>
</table>

Додаткова група спеціальних функцій

	Спеціальна функція	Вид і назва рівняння	(a,b) - інтервал ортогональності
11.	$I_n(x)$ - модифікована функція Бесселя	$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-\left(x+\frac{\nu^2}{x}\right)y=0$ Модифіковане рівняння Бесселя	—
12.	$K_n(x)$ - функція Макдональда		—
13.	$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ - сферична функція	$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y(\theta,\varphi)=0$	$\theta\in(0,\pi)$ $\varphi\in(0,2\pi)$