

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О.В. Барабаш

**ВСТУП В АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ**

**Частина I. Інтеграли та ряди**

Конспект лекцій  
для студентів фізичного факультету

Київ 2003

Вступ в асимптотичні методи. Конспект лекцій для студентів фізичного факультету. Ч. 1: "Інтеграли та ряди" / О.В.Барабаш, - К.: РВЦ "Київський університет", 2003. - 70 с.

Рецензенти: І.В.Сименюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
М.А.Разумова, канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
О.М.Радченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

# Зміст

Передмова . . . . .	4
1. Символіка $\mathcal{O}$ , $o$ . . . . .	6
2. Асимптотичний ряд та його властивості . . . . .	9
3. Неявні функції . . . . .	14
3.1 Метод ітерацій. . . . .	16
3.2 Алгебраїчні рівняння. . . . .	18
4. Асимптотика сум та рядів . . . . .	20
4.1 Метод підсумовування ряду. . . . .	21
4.2 Метод Абеля. . . . .	24
5. Асимптотика інтегралів . . . . .	29
5.1 Інтеграли Фур'є. Метод стаціонарної фази. . . . .	33
5.2 Інтеграли Лапласа . . . . .	39
5.3 Метод перевала . . . . .	48
Додаток 1 . . . . .	62
Додаток 2 . . . . .	63
Задачі . . . . .	65
Список літератури . . . . .	70

## Передмова

Асимптотичний аналіз — один із найважливіших напрямків в сучасній теорії фізичних моделей. Не буде перебільшенням сказати, що він складає цілу систему поглядів.

Академік М.М.Моїсеєв

Асимптотичні методи відомі в науці ще з робіт Лагранжа, який розробив і широко застосовував теорію збурень у небесній механіці. Але асимптотичний характер цієї теорії тоді ще не усвідомлювався, і вважалося, що кожний наступний член ряду уточнює попереднє наближення, так що сума нескінченного числа доданків збігається до точного розв'язку. Насправді, як показав у 1892 році А. Пуанкаре, ряд теорії збурень є розбіжним, і виникає питання про коректність методу: в якій мірі розбіжний ряд передає поведінку точного розв'язку? Виникла парадоксальна ситуація: з одного боку віковий досвід застосування теорії збурень в астрономії давав підґрунтя розглядати ці методи як зручні і надзвичайно точні, а з іншого боку доводилась їх повна "абсурдність" — асимптотичний ряд не може відповідати жодній функції. Такий суперечливий характер асимптотичного ряду не вкладався в аксіоматично чіткі рамки математики ХІХ століття. Відомий німецький математик Вейерштрасс висловився з цього приводу так: "Робота Пуанкаре не дуже-то порадує астрономів, оскільки знищує деякі їх давніші ілюзії і спростовує багато з того, що здавалося їм раніше обґрунтованим. Наприклад, доводиться розбіжність рядів, до яких приводять методи Ньюкома, Ліндстедта та інших... Здобуток досліджень Пуанкаре складається більше з негативних, ніж позитивних результатів." Такий скептичний погляд панував тоді в офіційній ортодоксальній математиці. Проте надзвичайна ефективність "некоректних" методів стимулювала дослідників продовжувати вивчення розбіжних рядів. Трьохтомний трактат Пуанкаре "Нові методи небесної механіки" дав змогу підвести під інтуїтивно правильні методи чіткий математичний фундамент. Офіційне визнання асимптотичні методи здобули в 1898 році, коли Паризька академія наук оголосила конкурс "Дослідження зростаючої ролі розбіжних рядів в аналізі", головний приз якого одержав Е.Борель. Так наприкінці ХІХ століття сформувався новий напрямок математичного аналізу — асимптотичні методи. Подальшого розвитку асимптотичний аналіз здобув у роботах Стілт'еса, Паде, Ван-дер-Поля, Ляпунова та інших. Важливу роль асимптотичним методам надавав видатний радянський академік М.М.Боголюбов, який разом із М.М.Криловим, Ю.О.Митропольським та іншими зробив вагомий внесок в асимптотичні методи нелінійних коливань.

Як це часто буває в математиці, розвиток фізичних ідей стимулює появу адекватних математичних методів. Так, наприклад, новим поштовхом до розвитку асимптотичних методів послужило доведення асимптотичного характеру ряду перенормованої теорії збурень в квантовій теорії поля. Паралельно були розроблені асимптотичні методи розрахунку діаграм далеких порядків теорії збурень.

В зв'язку з цим в кінці 70-х років набула актуальності проблема підсумовування розбіжних рядів. Це привело до відродження і узагальнення таких напівзабутих методів, як метод підсумовування Бореля, перетворення Зоммерфельда-Ватсона та інші.

В чому ж полягає ефективність асимптотичних методів? В переважній більшості випадків точний розв'язок реалістичної задачі знайти не вдається. Але, можливо, найбільш цікаві фізичні результати відповідають крайнім випадкам, коли деякі параметри, що входять в модель, приймають малі або великі значення. В цих граничних ситуаціях початкові рівняння часто спрощуються і стає можливим знайти їх розв'язок у вигляді ряду, частинні суми якого тим точніші, чим менше область зміни параметра. Яскраво цю ситуацію описав професор Р.Г.Баранцев: "Характерно, що разом із локалізацією [області] зростає і точність асимптотичних представлень. Точність і простота звичайно зустрічаються як поняття протилежні, додаткові. Прагнучи простоти, ми жертвуємо точністю, добиваючись точності, не чекаємо простоти. Однак при локалізації ці антиподи збігаються, протиріччя руйнується, знімається в синтезі, ім'я якому — асимптотика." Ще одна особливість асимптотичних методів полягає в тому, що вони застосовні тоді, коли інші методи (в тому числі й чисельні) стають непридатними. При цьому чим "безнадійніший" випадок, тим точніші асимптотичні методи.

Цей посібник призначений для студентів фізичного факультету, які вже знайомі з методами теорії функцій комплексної змінної в обсязі стандартного курсу. Мета посібника — навчити студента застосовувати асимптотичні методи в найбільш типових задачах математичного аналізу: асимптотиці сум, рядів, неявних функцій і, особливо, інтегралів<sup>1)</sup>. В зв'язку з практичною направленістю посібника, головна увага в ньому приділяється розв'язку задач. Це відображається і у стилі викладення матеріалу: як правило, теоретична частина охоплює лише найбільш типові та прості випадки (скінченний відрізок інтегрування, нескінченно диференційовні функції та інші). Всі "нюанси" розглядаються на конкретних прикладах. Узагальнення проводиться лише в тих випадках, коли це безумовно необхідно. Доведення теорем дається на "фізичному" рівні строгості: головна увага приділяється висвітленню суті методу. В зв'язку з цим, доведення проводяться такими методами, які можуть бути застосовні і в практичних розрахунках. Підбір задач у прикладах зумовлений більше методичною вагомістю, ніж важливістю одержаних результатів. Так, наприклад, в посібнику майже відсутні стандартні задачі на асимптотику спеціальних функцій, які можна знайти в будь-якому підручнику з цього курсу (дивись, наприклад, [1]). Замість цього автор вважає більш доцільним навести в посібнику довідковий матеріал по асимптотичній поведінці основних спеціальних функцій, який подано в додатку 2. В кінці посібника наведений список задач різної складності, які виносяться на семінарські заняття.

---

<sup>1)</sup> Асимптотиці диференційних рівнянь та якісним методам планується присвятити другу частину цього посібника.

## 1. Символіка $\mathcal{O}$ , $o$

При вивченні асимптотичних рядів ми будемо постійно використовувати  $\mathcal{O}$ -символіку для оцінки асимптотичної поведінки залишкового доданку. Поняття та деякі властивості символів  $\mathcal{O}$ ,  $o$  напевно вже відомі читачу з курсу математичного аналізу. Тому ми лише нагадаємо їх означення та більш детально зупинимось на деяких їх особливостях, які будуть необхідні нам у подальшому.

**Означення 1.** Кажуть, що  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  на інтервалі  $(a, b)$ , якщо існує константа  $A \neq \infty$  така, що

$$\forall x \in (a, b) : |f(x)| \leq A|g(x)|. \quad (1.1)$$

Символ  $\mathcal{O}$  вказує нам на поведінку функції  $f(x)$  в околі точки  $x_0$  (скінченної або нескінченної) в порівнянні з функцією  $g(x)$ .

Часто конкретне значення інтервалу  $(a, b)$  в (1.1) для нас не цікаве. В цьому разі ми будемо використовувати  $\mathcal{O}$ -оцінку в околі точки  $x_0$ .

**Означення 1а.** Кажуть, що  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  (або  $x \rightarrow \infty$ ), якщо існує деякий окіл  $O_\varepsilon(x_0) = \{|x - x_0| < \varepsilon\}$  точки  $x_0$  (відповідно,  $x > E$  для  $x_0 = +\infty$ ), та деяка константа  $A < \infty$  така, що

$$\forall x \in O_\varepsilon(x_0) : |f(x)| \leq A|g(x)|. \quad (1.1a)$$

Треба підкреслити, що запис  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  не є рівністю в звичайному розумінні цього слова, а вказує лише на належність функції  $f(x)$  до певного класу функцій. Так, наприклад,

$$\mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(x) \quad \text{але} \quad \mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Дійсно, запис  $\mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(x)$  означає, що для будь-якої функції  $f(x)$ , для якої вірно  $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$  вірно також і  $f(x) = \mathcal{O}(x)$  (ліворуч стоїть функція  $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ , праворуч — її оцінка). Обернена рівність ( $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x^2)$ ), звичайно не виконується. Проілюструємо властивості символу  $\mathcal{O}$  на прикладі функції Бесселя  $J_0(x)$ . Оцінка

$$J_0(x) = \mathcal{O}(1/\sqrt{x}), \quad x \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

говорить про те, що функція  $J_0(x)$  прямує до нуля принаймні як  $1/\sqrt{x}$  (або швидше). Уточненням цієї оцінки є рівність

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \quad \Leftrightarrow \quad J_0(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) = \mathcal{O}(x^{-3/2}).$$

Очевидно, що

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) = \mathcal{O}(1/\sqrt{x}), \quad \text{тоді як} \quad 1/\sqrt{x} \neq \mathcal{O}\left(\frac{\cos(x - \pi/4)}{\sqrt{x}}\right).$$

Тому записати замість (1.2) рівність

$$J_0(x) = \mathcal{O}\left(\frac{\cos(x - \pi/4)}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow \infty$$

не можна, оскільки вона б означала, що функція Бесселя  $J_0(x)$  обертається в нуль в тих же точках, що і  $\cos(x - \pi/4)$ , що невірно.

Функція  $g(x)$  повинна бути достатньо простою, для того, щоб  $\mathcal{O}$ -оцінка мала користь. При цьому "простота" функції  $g(x)$  розуміється з точки зору її аналітичних властивостей. Так, наприклад,  $n!$  виглядає простіше, ніж  $\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ , але для аналітичних розрахунків остання функція набагато зручніша.

**Означення 2.** Кажуть, що  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0$  — скінчене або  $\pm\infty$ ), якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (1.3)$$

Як і символ  $\mathcal{O}$ , символ  $o$  означає клас функцій (а не одну певну функцію) і тому відповідні рівності не можна розглядати в обидва боки. Інша річ — символ еквівалентності  $\sim$ .<sup>1)</sup>

**Означення 3.** Кажуть, що  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0$  — скінчене або  $\pm\infty$ ), якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (1.4)$$

Звичайно, що якщо  $f \sim g$ , то і  $g \sim f$ . В термінах  $o$  запис  $f \sim g$  можна переписати так:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)(1 + o(1)).$$

**Зауваження 1.** Незважаючи на те, що

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \quad (1.5)$$

ми не можемо записати замість (1.5) відношення еквівалентності

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4), \quad x \rightarrow \infty$$

оскільки границі відношення цих функцій не існує ( $J_0(x)$  обертається в нуль в інших точках, ніж  $\cos(x - \pi/4)$ ). Це зауваження залишається в силі і в тому разі, якщо ми в правій частині (1.5) врахуємо будь-яку скінчену кількість

<sup>1)</sup> Скрізь в цьому посібнику символ " $\sim$ " вживається як відношення еквівалентності, а не як знак пропорційності функцій, для якого ми будемо використовувати позначення " $\simeq$ ".

асимптотичних доданків.

### Дії з $\mathcal{O}$ -оцінками.

Наведемо без доведення деякі елементарні властивості символів  $\mathcal{O}$  та  $o$  ( $f = f(x)$ ,  $g = g(x)$ ):

- 1)  $C \cdot \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$  (відповідно,  $C \cdot o(f) = o(f)$ ),  $C$  — константа;
- 2)  $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(|f| + |g|)$  (аналогічно для  $o$ );
- 3)  $\mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$ ,  $o(f)\mathcal{O}(g) = o(f \cdot g)$ ;  
 $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(f)$ ,  $\mathcal{O}(o(f)) = o(f)$ .

$\mathcal{O}$ -оцінки можна інтегрувати, але не завжди можна диференціювати.

**Теорема 1.1** Нехай  $f(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Тоді, якщо інтеграли

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{та} \quad \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \text{— збігаються, то} \quad (1.6)$$

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = o\left(\int_{x_0}^x g(t) dt\right), \quad x \rightarrow x_0;$$

Якщо ж зазначені інтеграли розбігаються в точці  $x_0$ , то

$$\int_x^a f(t) dt = o\left(\int_x^a g(t) dt\right), \quad x \rightarrow x_0.$$

**Доведення.** Нехай інтеграли (1.6) — збігаються. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \int_{x_0}^x f(t) dt / \int_{x_0}^x g(t) dt \right] = \left/ \text{правило Лопітала} \frac{0}{0} \right/ = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$

Якщо ж інтеграли (1.6) — розбігаються, то

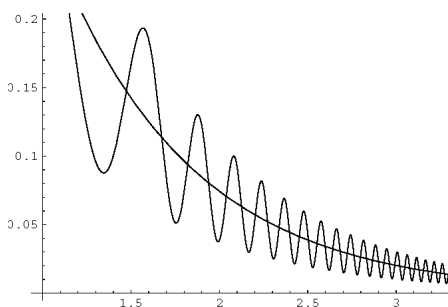
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \int_x^a f(t) dt / \int_x^a g(t) dt \right] = \left/ \text{правило Лопітала} \frac{\infty}{\infty} \right/ = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = 0.$$

Ще простіше доводиться можливість інтегрування оцінок з символом  $\mathcal{O}$ : якщо

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \quad x \in [a, b], \quad \text{то}$$

$$F(a, b) = \int_a^b f(x) dx = \mathcal{O}\left(\int_a^b |g(x)| dx\right).$$

Пропонуємо читачу самостійно довести це твердження.



Мал. 1

Диференціювати  $\mathcal{O}$ -оцінки в загальному випадку не можна. Дійсно, нехай  $f(x) = e^{-x} \sin e^{2x}$ . Тоді при  $x \rightarrow \infty$  ця функція є експоненційно малою:  $f(x) = \mathcal{O}(e^{-x})$ , тоді як її похідна  $f'(x) = -e^{-x} \sin e^{2x} + 2e^x \cos e^{2x} = \mathcal{O}(e^x)$  — експоненційно велика. Все сказане стосується і символу  $\sim$ . Малюнок 1 ілюструє відмінність асимптотичної рівності функцій та їх похідних.



## 2. Асимптотичний ряд та його властивості

Перш ніж переходити до точних означень, проілюструємо поняття асимптотичного ряду та його характерні властивості на простому прикладі.

Нехай, наприклад, треба знайти асимптотичну поведінку інтеграла

$$I(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

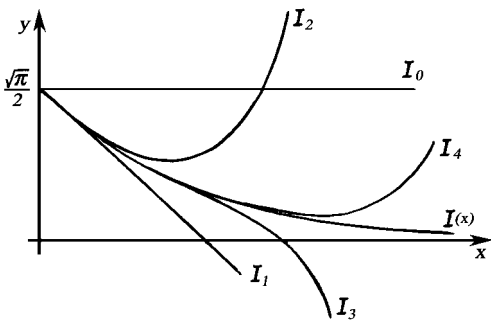
Спробуємо спочатку скористатися його рядом Тейлора

$$I(x) = \int_0^\infty - \int_0^x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}. \quad (2.2)$$

Ряд (2.2) збігається при всіх  $x$ . Це дозволяє нам знайти значення інтеграла  $I(x)$  при будь-якому, як завгодно великому  $x$ . Але чи передає ряд (2.2) функціональну поведінку інтеграла при великих  $x$ ? Для відповіді на це питання розглянемо  $N$ -ту частинну суму  $I_N(x)$  ряду (2.2):

$$I_N(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

На малюнку 2 зображено графіки функцій  $I_N(x)$  в порівнянні з точною залежністю  $I(x)$ . При зростанні  $N$  функції  $I_N(x)$  добре відображають поведінку  $I(x)$



Мал. 2

при деяких скінчених  $x$  і зовсім інакше поведуть себе при великих значеннях аргументу.

Але, можливо, ряд (2.2) можна використати для чисельних розрахунків? Нескладний аналіз показує, що для того, щоб знайти значення  $I(x)$  з відносною точністю хоча б

$$\Delta_N(x) = \frac{|I(x) - I_N(x)|}{I(x)} \simeq 1$$

необхідно взяти  $N \approx 4x^2$  доданків. При великих значеннях  $x$  це число швидко зростає, що робить ряд (2.2) неефективним для розрахунків. Таким чином при  $x \gg 1$  ряд Тейлора (2.2) не придатний ні для чисельних, ні для аналітичних досліджень асимптотичної поведінки інтеграла  $I(x)$ .

Спробуємо тепер застосувати інший метод. Проінтегруємо (2.1) частинами:

$$I(x) = - \int_x^\infty \frac{de^{-t^2}}{2t} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt. \quad (2.3)$$

Ідея інтегрування частинами полягає в тому, що при кожному інтегруванні ми зменшуємо підінтегральний вираз: замість  $e^{-t^2}$  ми маємо тепер під знаком інтеграла функцію  $e^{-t^2}/2t^2$ , яка при великих  $t$  спадає набагато швидше. Це дозволяє

легко оцінити асимптотичну поведінку  $I(x)$ :

$$I_1 = \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt < \frac{1}{2x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{I(x)}{2x^2} \Rightarrow I_1 = I(x)\mathcal{O}(1/x^2).$$

Таким чином, з (2.3) знаходимо

$$I(x)(1 + \mathcal{O}(1/x^2)) = \frac{e^{-x^2}}{2x} \Rightarrow I(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} (1 + \mathcal{O}(1/x^2)). \quad (2.4)$$

Оцінку (2.4) неважко уточнити. Для цього проінтегруємо частинами (2.3) ще  $N - 1$  разів. В результаті отримаємо такий вираз

$$I(x) = e^{-x^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1} x^{2n+1}} + R_N \right),$$

де  $R_N = \frac{(-1)^N (2N-1)!!}{2^N} \int_x^\infty \frac{e^{-(t^2-x^2)}}{t^{2N}} dt.$

Оцінимо тепер залишковий член  $R_N$ .

$$\begin{aligned} |R_N| &= C_N \int_x^\infty \frac{e^{-(t^2-x^2)}}{t^{2N}} dt = \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ t = \sqrt{\tau} \end{array} \right/ = \frac{C_N e^{x^2}}{2} \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-\tau} d\tau}{\tau^{N+1/2}} < \\ &< \frac{C_N e^{x^2}}{2x^{2N+1}} \int_{x^2}^\infty e^{-\tau} d\tau = \frac{C_N}{2x^{2N+1}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де  $C_N = \frac{(2N-1)!!}{2^N}$ , тобто  $R_N = \mathcal{O}(x^{-2N-1})$ . Таким чином,

$$I(x) = e^{-x^2} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1} x^{2n+1}} + \mathcal{O}(x^{-2N-1}) \right). \quad (2.6)$$

Проаналізувавши отриманий результат, помічаємо одну його "неприємну" особливість: ряд (2.6) розбіжний при всіх значеннях  $x$ . Відразу виникає питання: "Чи може розбіжний ряд якось характеризувати функцію?"

Знову розглянемо частинні суми  $I_N(x)$  ряду (2.6). Як впливає з (2.5) в цьому разі відносна похибка

$$\Delta_N(x) = \frac{|I(x) - I_N(x)|}{I(x)} \leq \frac{C_N}{x^{2N}} \quad (2.7)$$

і швидко прямує до нуля при фіксованому  $N$  і  $x \rightarrow \infty$ . Навпаки, при фіксованому  $x$  і  $N \rightarrow \infty$  похибка  $\Delta_N$  необмежено зростає, що є наслідком розбіжності ряду (2.6). Нерівність (2.7) дозволяє нам знайти оптимальне співвідношення між числом доданків в сумі (2.6) і значенням  $x$ : найменша відносна похибка буде при  $N \approx x^2$ . Дійсно, поблизу мінімуму  $\Delta_N(x)$ :

$$\Delta_N(x) \approx \Delta_{N+1}(x) \Rightarrow \frac{2N+1}{2x^2} \approx 1 \quad \text{або} \quad N \approx x^2. \quad (2.8)$$

Це значення  $N$  можна знайти і з інших міркувань: при фіксованому  $x$  абсолютна величина доданків в сумі (2.6) спочатку монотонно спадає, а потім, при деяким  $N = N_0$ , починає зростати. Ясно, що найменша відносна похибка буде при  $N = N_0$ . Розрахунки, аналогічні (2.8), знову дають  $N_0 \approx x^2$ . Для цих значень  $N$  відносна похибка  $\Delta_N(x)$  дорівнює

$$\Delta_N(x) \leq \frac{(2N-1)!!}{2^N x^{2N}} = \frac{(2N)!}{2^{2N} N! x^{2N}} \approx \left(\frac{N}{x^2}\right)^N e^{-N} \approx e^{-x^2}$$

(тут ми скористалися формулою Стірлінга  $N! \approx \sqrt{2\pi N} (N/e)^N$ ). Розбіжність ряду (2.6) нам зовсім не заважає! Таким чином, частинні суми ряду (2.6) тим точніші до значення  $I(x)$ , чим більше  $x$ . Ряд з такими властивостями називається асимптотичним.

Підіб'ємо перші підсумки нашого розгляду: на відміну від ряду Тейлора, який наближається до відповідної функції при фіксованому значенні  $x$  і  $N \rightarrow \infty$ , асимптотичний ряд (2.6) навпаки, тим точніший, чим більше  $x$  (при фіксованому  $N$ ). Саме ця властивість асимптотичного ряду (а не його розбіжність<sup>1)</sup>) і покладена в основу означення.

**Означення 1.** Будемо називати послідовність функцій  $\{\varphi_n(x)\}$  — асимптотичною при  $x \rightarrow x_0$ , якщо

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \rightarrow x_0.$$

**Означення 2. (Пуанкаре)** Нехай  $\{\varphi_n\}$  — асимптотична послідовність при  $x \rightarrow x_0$ . Будемо казати, що функція  $f(x)$  розкладається в асимптотичний ряд по послідовності  $\{\varphi_n\}$  і записувати

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow x_0, \quad (2.9)$$

якщо  $\forall n \in \mathbb{N}$  існують такі числа  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , що

$$f(x) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n). \quad (2.10)$$

В подальшому будемо використовувати такі скорочення: а.р. — асимптотичний ряд або асимптотичний розклад; а.п. — асимптотична послідовність.

**Приклад 1.** Послідовність функцій  $\varphi_n = 1/x^n$  буде асимптотичною, в той час, як послідовність  $g_n = \sin(nx)/x^n$  не є асимптотичною при  $x \rightarrow \infty$ , оскільки границі  $\lim_{x \rightarrow \infty} (g_{n+1}/g_n)$  не існує. Але в деяких випадках доводиться використовувати і послідовності типу  $g_n$ , які також називають асимптотичними (в деякому

<sup>1)</sup> Асимптотичний ряд може бути і збіжним. Зокрема, він може співпадати і з рядом Тейлора.

узагальненому сенсі (дивись, наприклад [1], стор. 41)). Наприклад, а.р. для функції Бесселя  $J_0$  має вигляд ( $x \rightarrow \infty$ )

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(x - \pi/4)/x^{2n} + b_n \sin(x - \pi/4)/x^{2n+1}) \quad (2.11)$$

з деякими коефіцієнтами  $a_n$  та  $b_n$ . Тут

$$\varphi_{2n} = \frac{\cos(x - \pi/4)}{x^{2n+1/2}}, \quad \varphi_{2n+1} = \frac{\sin(x - \pi/4)}{x^{2n+3/2}} \quad \text{і}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{2n+1}}{\varphi_{2n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(x - \pi/4)}{x} - \text{не існує,}$$

тобто розклад (2.11) не є асимптотичним в сенсі Пуанкаре.

З означення а.р. випливає, що розклад функції в а.р. єдиний (якщо він існує). Дійсно, нехай деяка функція  $f(x)$  має два різних розклади в ряд по а.п.  $\{\varphi_n\}$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad \text{та} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad x \rightarrow x_0, \quad (2.12)$$

де починаючи з деякого  $n = N$ :  $a_N \neq b_N$ . Перепишемо (2.12) у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) + \mathcal{O}(\varphi_{N+1}) \quad \text{та} \quad f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \varphi_n(x) + \mathcal{O}(\varphi_{N+1}) \quad x \rightarrow x_0. \quad (2.13)$$

Взявши різницю цих виразів, отримаємо таке рівняння

$$(a_N - b_N)\varphi_N + \mathcal{O}(\varphi_{N+1}) = 0, \quad x \rightarrow x_0,$$

з якого випливає, що  $\varphi_N = \mathcal{O}(\varphi_{N+1})$ , що суперечить означенню а.п. Таким чином, припущення про існування номера  $n = N$ , такого, що  $a_N \neq b_N$  — невірне. Це і доводить однозначність розкладу.

Коефіцієнти розкладу  $a_n$  можна послідовно знаходити за формулами

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} \right),$$

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - a_1 \varphi_1)/\varphi_2] \quad , \dots , \quad a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ (f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k) / \varphi_n \right]. \quad (2.14)$$

**Зауваження 1.** Хоча кожній функції  $f(x)$  і відповідає єдиний а.р. (якщо він існує), але сам цей а.р. визначає функцію не однозначно, тобто існує нескінченно багато функцій, які мають однаковий а.р. Наприклад, функції  $f(x)$  та  $f(x) + e^{-x}$  мають однакові а.р. по а.п.  $\varphi_n = 1/x^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $x \rightarrow \infty$ , оскільки функція  $e^{-x}$  має а.р., що складається з одних нулів, тобто

$$e^{-x} \sim 0 + 0 \cdot \frac{1}{x} + 0 \cdot \frac{1}{x^2} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

(цей розклад можна отримати, наприклад, з формул (2.14)).

Звичайно, що одну і ту ж саму функцію можна розкласти в ряд по різним а.п. При цьому вдалий вибір а.п. може суттєво поліпшити "збіжність" а.р. Слово "збіжність" ми взяли в лапки, оскільки а.р. може і розбігатись в звичайному розумінні збіжності функціонального ряду<sup>2)</sup>. Поліпшити збіжність — значить замінити а.п.  $\{\varphi_n\}$  послідовністю  $\{g_n\}$  такою, що  $g_n = o(\varphi_n)$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Пояснимо це на прикладі функції  $f(x) = 1/(x-1)$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Маємо:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^n} + \mathcal{O}(x^{-N-1});$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = (x+1) \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^{2n}} + \mathcal{O}(x^{-2N-1});$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^4-1} = (x+1)(x^2+1) \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^{4n}} + \mathcal{O}(x^{-4N-1}).$$

В цих розкладах ми використовували а.п.  $\{1/x^n\}$ ,  $\{(x+1)/x^{2n}\}$ ,  $\{(x+1)(x^2+1)/x^{4n}\}$ , кожна з яких покращує збіжність попереднього ряду.

### Дії з асимптотичними рядами.

Як правило ми будемо використовувати ряди з залишковим членом у вигляді відповідної  $\mathcal{O}$ -оцінки.

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n + \mathcal{O}(\varphi_{N+1}), \quad x \rightarrow x_0. \quad (2.15)$$

В цьому випадку з а.р. можна оперувати як із звичайними многочленами: а.р. можна додавати, перемножувати, підносити в степінь і т.п.

Трохи складнішим є питання про можливість почленного інтегрування або диференціювання а.р. Переписавши (2.15) у вигляді

$$f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n = \mathcal{O}(\varphi_{N+1})$$

ми бачимо, що це питання зводиться до можливості інтегрування або диференціювання  $\mathcal{O}$ -оцінок. В попередньому розділі ми вже відзначали, що  $\mathcal{O}$ -оцінки можна інтегрувати але, в загальному випадку, не можна диференціювати. Проте, існує

<sup>2)</sup> Підкреслимо відмінність умов збіжності і асимптотичності: для збіжності функціонального ряду необхідно, щоб залишок  $R_n = |f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k|$  прямував до нуля при  $n \rightarrow \infty$  і фіксованому значенні  $x$  з деякого околу точки  $x_0$ , в той час, як означення а.р. взагалі не накладає умови  $R_n \rightarrow 0$ . Наприклад, послідовність  $\varphi_1 = \ln x$ ,  $\varphi_2 = \ln \ln x$ ,  $\varphi_3 = \ln \ln \ln x$  і т.д. є асимптотичною при  $x \rightarrow \infty$ , але для неї  $R_n = \mathcal{O}(\varphi_n) \rightarrow \infty$ . Прямує до нуля лише відносна похибка  $R_n/f(x)$  (при цьому фіксованим є номер  $n$ , а не координата  $x$  як в означенні збіжності функціонального ряду).

один простий, але важливий випадок, коли почленне диференціювання а.р. є законним. Нехай функція  $f(x)$  розкладається в а.р. по а.п.  $\{\varphi_n\}$ ; нехай також послідовність  $\{\varphi'_n\}$  — асимптотична, а функція  $f'(x)$  може бути представлена а.р. по  $\{\varphi'_n\}$ , тобто

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_n(x) \quad (a), \quad f'(x) \sim \sum b_n \varphi'_n(x) \quad (b).$$

Тоді ряд (b) можна отримати почленним диференціюванням ряду (a). Це впливає з однозначності а.р. та можливості почленного інтегрування ряду (b). Таким чином,

*асимптотичний ряд не можна диференціювати лише в тому випадку, коли  $f'(x)$  не розкладається в а.р. по функціям  $\varphi'_n(x)$ , або коли послідовність  $\{\varphi'_n(x)\}$  не є асимптотичною.*

### 3. Неявні функції

В цьому розділі ми будемо досліджувати асимптотику коренів  $x(t)$  рівняння, заданого неявно

$$F(x, t) = 0, \quad t \rightarrow t_0. \quad (3.1)$$

В деяких випадках, коли рівняння (3.1) може бути розв'язане відносно параметра  $t$  (або деякої функції від  $t$ ), задача про асимптотику зводиться до простого застосування формули обернення Лагранжа.

**Теорема 3.1 (Формула обернення Лагранжа)** *Нехай  $\omega = f(z)$ , де  $f(z)$  — аналітична в околі  $z = 0$  функція комплексної змінної  $z$  така, що  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) \neq 0$ . Тоді обернена функція  $z = f^{-1}(\omega)$  існує, аналітична і розкладається в околі точки  $\omega = 0$  в ряд Тейлора*

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \omega^k, \quad \text{де} \quad C_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} \left( \frac{z}{f(z)} \right)^k \right\}_{z=0}. \quad (3.2)$$

Узагальненням формули (3.2) є формула

$$g(z) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \omega^k, \quad \text{де} \quad d_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} g'(z) \left( \frac{z}{f(z)} \right)^k \right\}_{z=0}. \quad (3.3)$$

Тут  $g(z)$  — довільна функція, аналітична в околі  $z = 0$ .

З умов теореми випливає, що функція  $f(z)$  в околі точки  $z = 0$  представляється рядом  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ , де  $a_1 \neq 0$ . Підставивши цей ряд в (3.2) отримуємо такі значення констант  $C_k$ :

$$C_1 = \frac{1}{a_1}, \quad C_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad C_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \quad \text{і т.д.} \quad (3.4)$$

**Приклад 2.**  $x e^x = t, \quad t \rightarrow 0.$

Функція  $f(z) = z e^z$  — аналітична в околі точки  $z = 0, f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ , тому застосовна формула обернення Лагранжа

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} C_k t^k, \quad \text{де } C_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} e^{-kx} \right\}_{z=0} = \frac{(-k)^{k-1}}{k!}.$$

**Приклад 3.**  $x^t = e^{-x}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.5)$

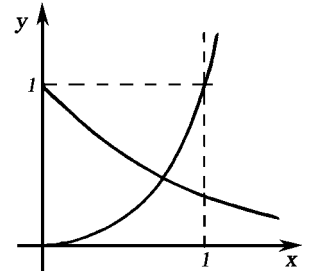
З графіка функцій  $e^{-x}$  та  $x^t$  (мал. 3) видно, що при  $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 1$ . Тому, зробимо спочатку заміну змінних  $\omega = 1/t, z = 1 - x$ . В змінних  $z, \omega$  рівняння (3.5) набуває вигляду

$$(1 - z)^{1/\omega} = e^{z-1} \quad \text{або} \quad \omega = -\frac{\ln(1 - z)}{1 - z}.$$

Функція  $f(z) = -\frac{\ln(1 - z)}{1 - z} = z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{6}z^3 + \mathcal{O}(z^4)$  — аналітична в околі точки  $z = 0$  і задовольняє умовам теореми Лагранжа. Тому за формулою (3.2)

$$z = \omega - \frac{3}{2}\omega^2 + \frac{8}{3}\omega^3 + \mathcal{O}(\omega^4)$$

або  $x = 1 - \frac{1}{t} + \frac{3}{2t^2} - \frac{8}{3t^3} + \mathcal{O}(t^{-4}), \quad t \rightarrow \infty.$



Мал. 3

**Приклад 4.**  $x = \text{ctg } x, \quad x > 0 \Rightarrow x_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$

Цей приклад відрізняється від попередніх відсутністю явно заданого параметру, який, крім того, є дискретним (порядковий номер кореня). Перше уявлення про поведінку коренів дає малюнок 4, з якого видно, що при  $n \rightarrow \infty$  корені рівняння  $x_n$  наближаються до значень  $\pi n$ . Тому, поклавши в (3.6)  $x = \pi n + z$ , отримуємо<sup>1)</sup>

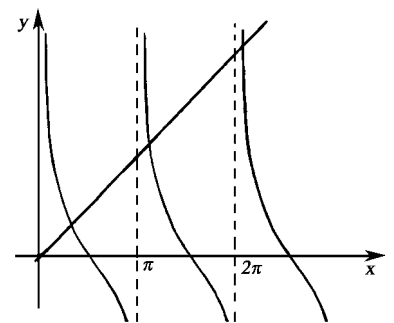
$$\pi n + z = \text{ctg } z, \quad n \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow 0.$$

Це рівняння вже явно включає параметр  $n$  і легко зводиться до необхідного вигляду

$$\omega = \frac{1}{\pi n} \Rightarrow \omega = f(z) = \frac{\sin z}{\cos z - z \sin z}, \quad z \rightarrow 0,$$

де  $f(z) = z + 7z^3/6 + \dots$  — аналітична в околі точки  $z = 0$  функція. Умови теореми 3.1 виконані, тому

$$z = \omega - \frac{7}{6}\omega^3 + \mathcal{O}(\omega^5) \Rightarrow x = \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{7}{6\pi^3 n^3} + \mathcal{O}(n^{-5}).$$



Мал. 4

<sup>1)</sup> При такій параметризації перший додатний корінь має номер  $n = 0$ .

### 3.1 Метод ітерацій.

Нехай рівняння (3.1) приводиться до виду

$$x = f(t) + g(x, t) \quad t \rightarrow t_0. \quad (3.7)$$

Нехай, крім того, виявляється, що  $g(x(t), t) = o(f(t))$ ,  $t \rightarrow t_0$ . Тоді асимптотику  $x(t)$  можна знайти методом ітерацій.

З умови  $g = o(f)$  випливає, що для кореня  $x(t)$  виконується оцінка:  $x = \mathcal{O}(f(t))$ ,  $t \rightarrow t_0$ . Позначимо цю оцінку як  $x^{(0)}$  (нульове наближення). Підставивши значення  $x^{(0)}$  в (3.7) отримуємо  $x^{(1)} = f + g(\mathcal{O}(f), t)$ , що є уточненням попередньої оцінки. Підставляючи значення  $x^{(1)}$  знову в (3.7) отримуємо  $x^{(2)}$ , що уточнює  $x^{(1)}$  і т.д.

**Приклад 5.** 
$$x e^x = t, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Спроба знайти асимптотику розв'язку  $x(t)$  за допомогою формули обернення Лагранжа (при деякій вдалій заміні змінних) до успіху не приводить оскільки, як це буде видно з подальшого, а.р. для  $x(t)$  не має вигляду степеневого ряду  $\sum c_k (g(t))^k$  з деякою функцією  $g(t)$ . Тому спробуємо застосувати метод ітерацій. Прологарифмувавши (3.8), перепишемо його у вигляді

$$x = \ln t - \ln x, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.8a)$$

Оскільки  $x > 0$  та  $x \rightarrow \infty$ , то (3.8a) дає  $x < \ln t$ , тобто  $x^{(0)} = \mathcal{O}(\ln t)$ . Тепер неважко довести, що другий доданок в правій частині (3.8a) є малим в порівнянні з першим

$$\ln x = \ln(\mathcal{O}(\ln t)) = \mathcal{O}(\ln \ln t) = o(\ln t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким чином, застосовний метод ітерацій.

$$x^{(1)} = \ln t + \mathcal{O}(\ln \ln t),$$

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \ln t - \ln(\ln t + \mathcal{O}(\ln \ln t)) = \ln t - \ln \left\{ \ln t \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{\ln \ln t}{\ln t} \right) \right) \right\} = \\ &= \ln t - \ln \ln t + \mathcal{O} \left( \frac{\ln \ln t}{\ln t} \right), \end{aligned}$$

$$x^{(3)} = \ln t - \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln \ln t}{\ln t} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2} \right) \quad \text{і т.д.}$$

**Приклад 6.** 
$$\frac{x}{\ln x} = t, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

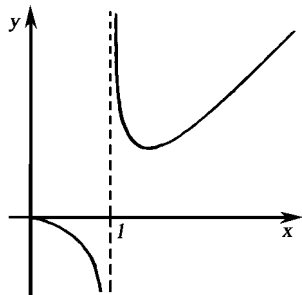
З графіка функції  $y = x/\ln x$  (мал. 5) видно, що існує два розв'язки рівняння (3.9): а)  $x_1 \rightarrow 1$  та б)  $x_2 \rightarrow \infty$ . У випадку а) асимптотику легко знайти за допомогою формули Лагранжа.

$$x = 1+z, \quad \omega = 1/t; \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\ln(1+z)}{1+z} = z - \frac{3}{2}z^2 + \dots \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{t} + \frac{3}{2t^2} + \mathcal{O}(t^{-3}).$$



У випадку б) поступимо слідуючим чином. Введемо нову змінну  $y = x/t$ . Рівняння (3.9) прийме вигляд

$$\frac{y}{\ln yt} = 1 \quad \text{або} \quad y = \ln t + \ln y, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.9a)$$



Рівняння (3.9a) як і (3.9) має два кореня:  $y_1 \rightarrow 0$  та  $y_2 \rightarrow \infty$ . Корінь  $y_1$  відповідає значенню  $x = x_1 \rightarrow 1$ , асимптотика якого вже знайдена. Таким чином, в (3.9a) треба вважати, що  $y \rightarrow \infty$ . В цьому випадку  $\ln y = o(y)$ ; тому з (3.9a) маємо

$$\text{Мал. 5} \quad y = \ln t + o(y) \Rightarrow y \sim \ln t; \quad \ln y \sim \ln \ln t = o(\ln t). \quad (3.9б)$$

Таким чином, ми можемо застосувати метод ітерацій.

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \ln t + \mathcal{O}(\ln \ln t), \\ y^{(2)} &= \ln t + \ln \ln t + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right) \\ y^{(3)} &= \ln t + \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right) \quad \text{і т.д.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Повертаючись до змінної  $x$ , знаходимо:

$$x = t \ln t + t \ln \ln t + \frac{t \ln \ln t}{\ln t} - \frac{t}{2} \left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{t \ln \ln t}{(\ln t)^2}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Підстановка  $y = x/t$  виглядає трохи штучною. Більш типовим прийомом є логарифмування. Прологарифмувавши (3.9) отримуємо

$$\ln x = \ln t + \ln \ln x, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Тепер вже цілком природно виглядає заміна  $y = \ln x$ , в результаті якої рівняння (3.12) приймає вигляд (3.9a). Повертатись до змінної  $x$  можна двома способами. Якщо записати  $x = e^y$  і використати оцінку (3.10), то ми зможемо отримати лише перші два доданка а.р.:

$$\begin{aligned} x &= \exp \left[ \ln t + \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right) \right] = t \ln t \exp \left[ \frac{\ln \ln t}{\ln t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right) \right] = t \ln t \left[ 1 + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Тому потрібно намагатися уникнути операції піднесення в степінь за рахунок використання початкового рівняння. В даному випадку це просто зробити, записавши  $x = t \ln x = ty$ , звідки відразу знаходимо (3.11).

### 3.2 Алгебраїчні рівняння.

Розглянемо рівняння

$$a_n(\varepsilon)x^n + a_{n-1}(\varepsilon)x^{n-1} + \dots + a_0(\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

де  $a_i(\varepsilon)$  — деякі функції від параметра  $\varepsilon$ . Нас буде цікавити асимптотична поведінка коренів  $x_i(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Будемо вважати, що функції  $a_i(\varepsilon)$  розкладаються в ряд Маклорена:  $a_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ik}\varepsilon^k$ . В цьому разі кожний із коренів  $x_i(\varepsilon)$  можна також представити у вигляді ряду по степеням  $\varepsilon$

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon^{p_k}, \quad p_{k+1} > p_k, \quad (3.14)$$

де  $p_k$  — раціональні числа. Структура ряду (3.14) може бути досить складною. Наприклад, рівняння  $\varepsilon x^3(x + 2\varepsilon)^3 = 1$  має один із коренів виду

$$x = -\varepsilon + \varepsilon^{-1/6} \sqrt{1 + \varepsilon^{7/3}} = -\varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon^{\frac{14k-1}{6}}.$$

Проблема полягає в тому, щоб "вгадати" закономірність побудови коефіцієнтів  $p_k$ . Якщо така закономірність нам відома, то величини  $\alpha_k$  знаходяться підстановкою ряду (3.14) в рівняння (3.13). Проте, є один простий випадок, коли ми можемо передбачити вигляд ряду (3.14), не вникаючи в детальну структуру рівняння (3.13). Покладемо в (3.13)  $\varepsilon = 0$ . Якщо рівняння

$$a_n(0)x^n + a_{n-1}(0)x^{n-1} + \dots + a_0(0) = 0 \quad (3.15)$$

має розв'язок  $x_0$  кратності  $m \geq 1$ , то відповідний йому корінь  $x(\varepsilon)$  буде мати розклад виду

$$x(\varepsilon) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varepsilon^{k/m}.$$

Рівняння (3.15) може мати порядок  $n'$  менший за  $n$ . В цьому разі частина залишившихся коренів (число яких  $n - n'$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  прямують в нескінченність. Тому для них ряд (3.14) буде починатися з  $\varepsilon^{p_0}$ , де  $p_0 < 0$ . Розглянемо один типовий приклад.

**Приклад 7.**  $\varepsilon x^5 + (x - 1)^2(x + 1) = 0. \quad (3.16)$

При  $\varepsilon = 0$  рівняння (3.16) переходить в рівняння  $(x - 1)^2(x + 1) = 0$ , яке має три кореня:  $x_1 = -1$ ,  $x_{2,3} = 1$ . Корінь  $x_1 = -1$  — однократний, тому для нього розв'язок  $x_1(\varepsilon)$  шукаємо у вигляді

$$x_1(\varepsilon) = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon^k.$$

Підставивши цей ряд в (3.16), отримуємо

$$\begin{aligned} & \varepsilon(-1 + c_1\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2))^5 + (-2 + c_1\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2))^2(c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) = \\ & = \varepsilon(4c_1 - 1 + \varepsilon(5c_1 - 4c_1^2 + 4c_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1/4, \quad c_2 = -1/4; \\ & \quad x_1(\varepsilon) = -1 + \varepsilon/4 - \varepsilon^2/4 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Корінь  $x = 1$  — двократний; в цьому разі розв'язки (3.16) треба шукати у вигляді

$$x(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon^{k/2}. \quad (3.17)$$

Підстановка (3.17) в (3.16) дає

$$\begin{aligned} & \varepsilon(1 + c_1\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon))^5 + (c_1\sqrt{\varepsilon} + c_2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}))^2(2 + c_1\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \\ & = \varepsilon(1 + 2c_1^2 + c_1\sqrt{\varepsilon}(5 + c_1^2 + 4c_2) + \mathcal{O}(\varepsilon)) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \pm i/\sqrt{2}, \quad c_2 = -9/8 \end{aligned}$$

і ми отримуємо два комплексно спряжених кореня

$$x_2 = x_3^* = 1 + i\sqrt{\varepsilon/2} - \frac{9\varepsilon}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).$$

Два залишившихся кореня  $x_{4,5}$  прямують в нескінченність при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тому для них розклад (3.14) буде починатися з від'ємного степеня  $\varepsilon$ . Для його знаходження застосуємо теорему Вієта: вільний коефіцієнт  $a_0$  приведенного рівняння (3.13), тобто рівняння з  $a_n = 1$ , дорівнює добутку всіх коренів (з точністю до множника  $(-1)^n$ ), а коефіцієнт  $-a_{n-1}$  — їх сумі, тобто

$$-x_1 \cdot \dots \cdot x_5 = x_4 x_5 (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = 1/\varepsilon, \quad (3.18)$$

$$x_1 + \dots + x_5 = x_4 + x_5 + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0. \quad (3.19)$$

З рівнянь (3.18) та (3.19) випливає, що  $x_4 = x_5^*$  і перший доданок розкладу (3.14) дорівнює  $i/\sqrt{\varepsilon}$ . Тому, корінь  $x_4(\varepsilon)$  шукаємо у вигляді

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^{k/2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (i + c_2 \sqrt{\varepsilon} + \dots). \quad (3.20)$$

Підставляючи (3.20) в (3.16), знаходимо коефіцієнти  $c_k$  (зокрема,  $c_2 = -1/2$ , що видно вже з (3.19)). Результат (3.20) можна отримати і з інших міркувань. Оскільки при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x_4 \rightarrow \infty$ , то в (3.16) домінуючими доданками є  $\varepsilon x^5$  та  $x^3$

$$(3.16) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon x^5 \approx -x^3,$$

звідки і випливає вигляд головного доданку розкладу (3.20).

## 4. Асимптотика сум та рядів

**Теорема 4.1 (Інтегральна оцінка)** *Нехай  $f(x)$  – неперервно диференційовна функція на інтервалі  $x \geq a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ . Тоді*

$$\left| \sum_{k=a}^n f(k) - \int_a^n f(x) dx \right| \leq \int_a^n |f'(x)| dx + |f(a)| \quad \text{або} \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=a}^n f(k) = \int_a^n f(x) dx + \mathcal{O} \left( \int_a^n |f'(x)| dx \right). \quad (4.1a)$$

**Доведення.** Позначимо  $\Delta_n = \left| \sum_{k=a}^n f(k) - \int_a^n f(x) dx \right|$ . Тоді

$$\Delta_n = \left| \sum_{k=a+1}^n \left[ f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right] + f(a) \right| \leq \sum_{k=a+1}^n |I_k| + |f(a)|, \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} |I_k| &= \left| f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right| = \left| \int_{k-1}^k (f(k) - f(x)) dx \right| = \left| \int_{k-1}^k dx \int_x^k f'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{k-1}^k dx \int_x^k |f'(t)| dt \leq \int_{k-1}^k dx \int_{k-1}^k |f'(t)| dt = \int_{k-1}^k |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

$$\text{Звідки} \quad \Delta_n \leq \sum_{k=a+1}^n \int_{k-1}^k |f'(t)| dt + |f(a)| = \int_a^n |f'(x)| dx + |f(a)|.$$

**Наслідок 1.** *Якщо  $f(x)$  – монотонна функція, то*

$$\sum_{k=a}^n f(k) = \int_a^n f(x) dx + \mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(1). \quad (4.1b)$$

**Зауваження.** *Доведення залишається в силі, якщо функція  $f$  залежить від  $n$  як від параметра, тобто  $f = f(x, n)$ . При цьому, наприклад, (4.1b) набуває вигляду*

$$\sum_{k=a}^n f(k, n) = \int_a^n f(x, n) dx + \mathcal{O}(f(n, n)) + \mathcal{O}(f(a, n)).$$

**Наслідок 2.** *Нехай функція  $f(x)$  така, що ряд  $S(n) = \sum_n^{\infty} f(k, n)$  – збігається.*

*Тоді*

$$S(n) = \int_n^{\infty} f(x, n) dx + \mathcal{O} \left( \int_n^{\infty} |f'_x(x, n)| dx \right).$$

Теорема 4.1 дозволяє знайти лише головний доданок а.р. Для знаходження повного а.р. треба застосовувати інші методи.

#### 4.1 Метод підсумовування ряду.

Проілюструємо цей метод на прикладі суми [2]

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

Метод розпадається на два етапа. На першому етапі нам необхідно знайти таку послідовність  $b_k$ , щоб сума  $\sum_{k=1}^n b_k$  – була точно відома, а ряд  $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$  – збігався. Для цього застосуємо інтегральну оцінку

$$S_n = \int_1^n \sqrt{x} dx + \mathcal{O}(\sqrt{n}) = \frac{2}{3}n^{3/2} + \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

Візьмемо в якості першого наближення послідовність

$$b_k^{(1)} = \frac{2}{3}(k^{3/2} - (k-1)^{3/2}) = \sqrt{k} - \frac{1}{4\sqrt{k}} - \frac{1}{24k^{3/2}} + \mathcal{O}(k^{-5/2}).$$

Для цієї послідовності  $\sum_{k=1}^n b_k^{(1)} = \frac{2}{3}n^{3/2}$ ;

$$I_n = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k^{(1)}) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^n \mathcal{O}(k^{-3/2}) = \left/ \begin{array}{l} \text{інтегральна} \\ \text{оцінка} \end{array} \right/ = \frac{1}{2}\sqrt{n} + \mathcal{O}(1). \quad (4.2)$$

Сума  $I_n$  розбіжна і прямує у нескінченність як  $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ . Тому в якості другого наближення візьмемо послідовність

$$b_k^{(2)} = \frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{1}{4}k^{-1/2} + \frac{1}{16}k^{-3/2} + \mathcal{O}(k^{-5/2}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n b_k^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Таким чином, якщо в якості послідовності  $b_k$  взяти  $b_k = b_k^{(1)} + b_k^{(2)}$ , то, як видно з (4.2), ряд  $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \mathcal{O}(1)$ , тобто є збіжним.

Тепер, коли послідовність  $b_k$  знайдена, переходимо до другого етапу. Він полягає в знаходженні асимптотичного ряду для залишкового члену  $R_n$  (дивись нижче).

Позначимо  $C_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ . Тоді

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = C_0 - \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k) = C_0 - R_n. \quad (4.3)$$

З іншого боку

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = S_n - \sum_{k=1}^n (b_k^{(1)} + b_k^{(2)}) = S_n - \frac{2}{3}n^{3/2} - \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Тому (4.3) дає нам

$$S_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + C_0 - R_n; \quad R_n = o(1).$$

Для знаходження  $R_n$  використовуємо асимптотичний вигляд послідовності  $b_k$ .

$$b_k = b_k^{(1)} + b_k^{(2)} = a_k + \frac{1}{48}k^{-3/2} + \mathcal{O}(k^{-5/2}); \quad (4.4)$$

$$R_n = \frac{1}{48} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-3/2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{O}(k^{-5/2}) = \left/ \begin{array}{l} \text{інтегральна} \\ \text{оцінка} \end{array} \right/ = \frac{1}{24\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-3/2}).$$

Таким чином

$$S_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + C_0 - \frac{1}{24\sqrt{n}} + \mathcal{O}(n^{-3/2}). \quad (4.5)$$

Оцінку (4.5) можна і далі уточнювати. Для цього необхідно продовжити розклад (4.4) коефіцієнтів  $b_k$ . Значення константи  $C_0$  залишається невизначеним. Це є недоліком методу підсумовування (але, як правило, не дуже серйозним). В даному випадку  $C_0 = \zeta(-1/2)$ , де  $\zeta(z)$  — дзета-функція Рімана. Це значення  $C_0$  можна отримати із слідуєчих міркувань. Узагальнимо формулу (4.5) на довільний показник степеня  $\alpha$ . Виконавши аналогічні до попереднього розрахунки, отримаємо

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{2}n^{-\alpha} + C_0(\alpha) + \mathcal{O}(n^{-\alpha-1}), \quad \alpha \neq 1. \quad (4.6)$$

Функція  $S_n(\alpha)$  є аналітичною від комплексної змінної  $\alpha$ . В області  $\Re \alpha > 1$  головним доданком в правій частині (4.6) стає константа  $C_0(\alpha)$ . Тому, перейшовши в (4.6) до границі  $n \rightarrow \infty$  (ряд  $S_n(\alpha)$  збіжний при  $\Re \alpha > 1$ ), отримуємо:  $S_\infty(\alpha) = C_0(\alpha)$ . З іншого боку, функція  $S_\infty(\alpha)$  в області  $\Re \alpha > 1$  співпадає із дзета-функцією Рімана

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}, \quad \Re z > 1.$$

Таким чином  $C_0(\alpha) = \zeta(\alpha)$  при  $\Re \alpha > 1$ . Застосуємо тепер теорему про аналітичне продовження: оскільки функція  $C_0(\alpha)$  аналітична по змінній  $\alpha$  і співпадає з  $\zeta(\alpha)$  в області  $\Re z > 1$ , то  $C_0(\alpha) \equiv \zeta(\alpha)$  в усій комплексній площині, за винятком особливих точок функції  $\zeta(z)$  ( $\zeta$ -функція має лише одну особливу точку  $z = 1$ , яка є полюсом першого порядку з лишком 1). В результаті формула (4.6) приймає вигляд

$$\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{2}n^{-\alpha} + \zeta(\alpha) + \mathcal{O}(n^{-\alpha-1}), \quad \alpha \neq 1. \quad (4.7)$$

Метод підсумовування застосовний і у випадку сум виду  $\sum_k f(k, n)$ . Відмінність полягає лише в тому, що тепер відсутній другий етап.

**Приклад 8.** Знайдемо суму  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k/n)$ , з точністю до  $\mathcal{O}(1/n^2)$ . Тут  $f(x)$  — нескінченно диференційовна на відрізку  $[0, 1]$  функція. Маємо:

$$S_n = \left/ \begin{array}{l} \text{інтегральна} \\ \text{оцінка} \end{array} \right/ = \int_0^n f(x/n) dx + \mathcal{O}(1) = nF(x/n) \Big|_0^n + \mathcal{O}(1),$$

де  $F(x)$  — первісна функції  $f(x)$ . Розглянемо послідовність  $b_k$ :

$$b_k = n \left( F(k/n) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n b_k = n(F(1) - F(0)). \quad (4.8)$$

З іншого боку, розкладаючи функцію  $F(k/n - 1/n)$  в ряд Тейлора в околі точки  $k/n$ , отримуємо

$$\begin{aligned} b_k &= f(k/n) - \frac{1}{2n} f'(k/n) + \frac{1}{6n^2} f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n b_k &= S_n - f(0) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f'(k/n) + \frac{1}{6n^2} \sum_{k=1}^n f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^2). \end{aligned}$$

Підставляючи сюди рівність (4.8), знаходимо

$$S_n = n(F(1) - F(0)) + f(0) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f'(k/n) - \frac{1}{6n^2} \sum_{k=1}^n f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^2). \quad (4.9)$$

Для знаходження суми  $\sum_{k=1}^n f'(k/n)$  застосуємо той же прийом, що і для суми  $S_n$ . А саме, побудуємо послідовність

$$\begin{aligned} u_k &= f(k/n) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} f'(k/n) - \frac{1}{2n^2} f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n u_k &= f(1) - f(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'(k/n) - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^2). \end{aligned}$$

Звідки

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f'(k/n) = \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) + \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^2).$$

Підставляючи цей вираз в (4.9), отримуємо

$$S_n = n(F(1) - F(0)) + \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + \frac{1}{12n^2} \sum_{k=1}^n f''(k/n) + \mathcal{O}(1/n^2).$$

Залишається знайти суму  $\sum_{k=1}^n f''(k/n)$  з точністю до  $\mathcal{O}(1)$ . Тут нам підходить інтегральна оцінка

$$\sum_{k=1}^n f''(k/n) = \sum_{k=0}^n f''(k/n) + \mathcal{O}(1) = \int_0^n f''(x/n) dx + \mathcal{O}(1) = n(f'(1) - f'(0)) + \mathcal{O}(1).$$

Таким чином

$$\sum_{k=0}^n f(k/n) = \int_0^n f(x/n) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + \frac{1}{12n}(f'(1) - f'(0)) + \mathcal{O}(1/n^2). \quad (4.10)$$

Формула (4.10) є частинним випадком більш загальної формули підсумовування Ейлера – Маклорена, яку ми доведемо в наступному підрозділі.

## 4.2 Метод Абеля.

Один із найефективніших методів підсумовування рядів пов'язаний із так званим перетворенням Абеля. Тому і сам цей метод називають методом Абеля або методом підсумовування частинами.

**Теорема 4.2** Нехай  $\{a_k\}$  – послідовність, а  $b(x)$  – неперервно диференційовна функція. Тоді

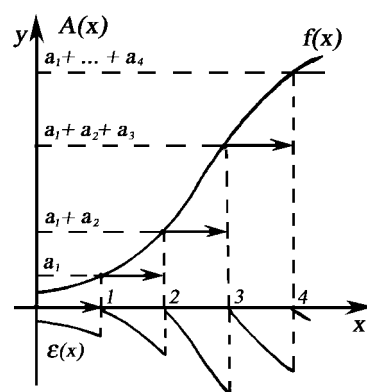
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_1^n A(x)b'(x) dx, \quad (4.11)$$

де  $A(x)$  – сходячка функція виду  $A(x) = \sum_{k=1}^{[x]} a_k$ , а  $[x]$  – ціла частина числа  $x$  (дивись мал. 6).

**Доведення.** Будемо для скорочення писати  $b_k$  замість  $b(k)$ , та  $A_k$  замість  $A(k)$ . Оскільки  $a_1 = A_1$ ,  $a_i = A_i - A_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  то

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + \dots + (A_n - A_{n-1}) b_n = \\ &= A_1 (b_1 - b_2) + A_2 (b_2 - b_3) + \dots + A_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + A_n b_n = \\ &= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \int_k^{k+1} b'(x) dx = \left/ \begin{array}{l} A_k = A(x), \\ x \in [k, k+1) \end{array} \right/ = \\ &= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} A(x) b'(x) dx = A(n) b(n) - \int_1^n A(x) b'(x) dx. \end{aligned}$$

Формула (4.11) називається перетворенням Абеля або формулою підсумовування частинами (по аналогії з формулою інтегрування частинами). Проілюструємо її на прикладах.



Мал. 6



**Попередні зауваження.** Нехай послідовність  $a_k$  така, що її  $n$ -та частинна сума точно відома:  $\sum^n a_k = f(n)$ , де  $f(x)$  — відома функція. Тоді, як видно з малюнку 6,

$$\varepsilon(x) = A(x) - f(x) = \mathcal{O}(a_k), \text{ де } k = [x + 1].$$

**Приклад 9.** Оцінимо суму  $S_n = \sum_{k=1}^n \sin k \ln k$ . Покладемо  $a_k = \sin k$ ,  $b(x) = \ln(x)$ . Тоді, оскільки  $|\sum \sin k| = \mathcal{O}(1)$ , то і  $A(x) = \mathcal{O}(1)$ . Формула (4.11) дає

$$S_n = A_n \ln n - \int_1^n A(x) \frac{dx}{x} = \mathcal{O}(1) \ln n - \int_1^n \mathcal{O}(1) \frac{dx}{x} = \mathcal{O}(\ln n).$$

**Приклад 10.** Знайдемо асимптотику  $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{k}}$  при  $t \rightarrow 0$ . Покладемо  $a_k = 1/\sqrt{k}$ ,  $b(x) = e^{-tx}$ . Оскільки (дивись (4.7))

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \zeta(1/2) + \mathcal{O}(1/\sqrt{n}),$$

то  $A(x) = 2\sqrt{x} + \zeta(1/2) + \mathcal{O}(1/\sqrt{x})$ , де  $\zeta(z)$  — дзета-функція Рімана. Таким чином

$$S(t) = t \int_1^{\infty} e^{-tx} (2\sqrt{x} + \zeta(1/2) + \mathcal{O}(1/\sqrt{x})) dx.$$

Починаємо інтегрувати з останнього доданку, оскільки саме він визначає точність оцінки  $S(t)$ .

$$t \int_1^{\infty} e^{-tx} \mathcal{O}(1/\sqrt{x}) dx = \mathcal{O} \left( t \int_1^{\infty} e^{-tx} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = \mathcal{O} \left( \sqrt{t} \int_t^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \right) = \mathcal{O}(\sqrt{t}).$$

Всі інші інтеграли рахуємо з точністю до  $\mathcal{O}(\sqrt{t})$ .

$$\begin{aligned} 2t \int_1^{\infty} e^{-tx} \sqrt{x} dx &= \frac{2}{\sqrt{t}} \int_t^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} dx = \frac{2}{\sqrt{t}} \left( \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} dx - \int_0^t e^{-x} \sqrt{x} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}} \left( \Gamma(3/2) + \mathcal{O}(t^{3/2}) \right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} + \mathcal{O}(t^{1/2}); \end{aligned}$$

$$t\zeta(1/2) \int_1^{\infty} e^{-tx} dx = \zeta(1/2) + \mathcal{O}(t).$$

Таким чином  $S(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} + \zeta(1/2) + \mathcal{O}(t^{1/2})$ .

Якщо б в якості  $a_k$  ми б взяли  $a_k = e^{-kt}$ , то в цьому випадку  $\varepsilon(x) = \mathcal{O}(e^{-xt})$  і

$$\int_1^{\infty} \varepsilon(x) b'(x) dx = \int_1^{\infty} \mathcal{O}(e^{-xt}) \frac{dx}{x^{3/2}} = \mathcal{O}(1).$$

Тому ми б отримали лише  $S(t) = \sqrt{\pi/t} + \mathcal{O}(1)$  (отримаєте цей результат).

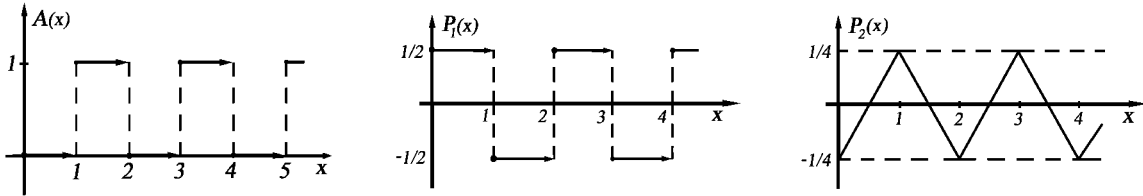
Зрозуміло, що кількість асимптотичних доданків, які можна знайти методом Абеля, обмежена точністю, з якою відома функція  $A(x)$ . В деяких випадках функцію  $A(x)$  вдається точно знайти. Це дозволяє отримати повний а.р. В якості наступного прикладу, знайдемо загальну формулу для знакозмінних сум виду

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} f(k),$$

де  $f(x)$  — довільна, нескінченно диференційовна функція. Покладемо  $a_k = (-1)^{k+1}$ ,  $b(x) = f(x)$ . Оскільки  $A(2n) = 0$ , то формула (4.11) дає

$$S_{2n} = - \int_1^{2n} A(x) f'(x) dx, \quad (4.12)$$

де  $A(x)$  — сходиноква функція (дивись мал. 7). Функція  $A(x)$  — періодична і



Мал. 7

має середнє значення  $\overline{A(x)} = 1/2$ . Тому представимо її у вигляді

$$A(x) = \frac{1}{2} - P_1(x), \quad \overline{P_1(x)} = 0.$$

Розкладемо функцію  $P_1(x)$  в ряд Фур'є:

$$P_1(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1}. \quad (4.13)$$

Введемо функцію  $P_2(x)$  таку, що  $P_2'(x) = P_1(x)$  і  $\overline{P_2(x)} = 0$ , тобто

$$P_2(x) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}, \quad \Rightarrow \quad P_2(1) = -P_2(2n) = 1/4.$$

Формула (4.12) приймає вигляд

$$\begin{aligned} S_{2n} &= - \int_1^{2n} (1/2 - P_1(x)) f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) - f(2n)) + \int_1^{2n} f'(x) dP_2(x) = \\ &= \frac{1}{2} (f(1) - f(2n)) - P_2(1) (f'(1) + f'(2n)) - \int_1^{2n} f''(x) P_2(x) dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В останньому інтегралі стоїть добуток функції  $f''(x)$  на періодичну функцію  $P_2(x)$  з нульовим середнім значенням. Це дає нам підставу сподіватися, що значення інтегралу буде набагато меншим, ніж  $2n\overline{|f''(x)|}$ . Саме для цього ми і накладали умову  $\overline{P_2(x)} = 0$ .

Введемо функції  $P_k(x)$  такі, що

$$\frac{dP_k(x)}{dx} = P_{k-1}(x), \quad \text{та} \quad \overline{P_k(x)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зокрема

$$P_{2m}(x) = 2 \frac{(-1)^m}{\pi^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2m}}, \quad \Rightarrow \quad P_{2m}(1) = -P_{2m}(2n).$$

Явний вигляд функцій  $P_{2m+1}(x)$  нам не знадобиться; достатньо лише знати, що

$$P_{2m+1}(1) = P_{2m+1}(2n) = 0.$$

Продовжуючи в (4.14) інтегрувати частинами, отримаємо такий ряд для  $S_{2n}$

$$S_{2n} = \frac{1}{2}(f(1) - f(2n)) - \sum_{k=1}^m P_{2k}(1)(f^{(2k-1)}(1) + f^{(2k-1)}(2n)) + R_{2m}, \quad (4.15)$$

$$\text{де} \quad R_{2m} = - \int_1^{2n} P_{2m}(x) f^{(2m)}(x) dx = \int_1^{2n} P_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx.$$

Коефіцієнти  $P_{2k}(1)$  дорівнюють

$$P_{2m}(1) = 2 \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m}} = \frac{2^{2m} - 1}{(2m)!} B_{2m},$$

де  $B_{2m}$  — числа Бернуллі (значення кількох перших чисел  $B_m$  можна знайти в додатку 1). Підставляючи вираз для  $P_{2m}(1)$  в (4.15) отримаємо остаточно таку формулу

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} f(k) = \frac{1}{2}(f(1) - f(2n)) - \sum_{k=1}^m \frac{2^{2k} - 1}{(2k)!} B_{2k} (f^{(2k-1)}(1) + f^{(2k-1)}(2n)) + R_{2m}. \quad (4.16)$$

Функція  $f(x)$  повинна бути достатньо гладкою. Гладкість функції необхідна для того, щоб залишковий член  $R_{2m}$  прямував до нуля при  $m \rightarrow \infty$ . Знайдемо достатню для цього умову. Але спочатку отримаємо асимптотику коефіцієнтів  $B_{2m}$ . Для цього розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = 1 + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{9^n} + \dots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}. \quad (4.17)$$

Переходячи в (4.17) до границі  $n \rightarrow \infty$  знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^{2n} |B_{2n}|}{2(2n)!} = 1 \quad \Rightarrow \quad |B_{2n}| \sim 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Тепер ми вже можемо оцінити  $R_{2m}$ .

$$|R_{2m}(x)| \leq \int_1^{2n} |P_{2m}(x)| |f^{(2m)}(x)| dx \leq \frac{2}{\pi^{2m}} \int_1^{2n} |f^{(2m)}(x)| dx \leq \frac{4nC_{2m}}{\pi^{2m}},$$

де  $C_{2m} = \sup |f^{(2m)}(x)|$ ,  $x \in [1, 2n]$ . Умова

$$C_{2m} \leq (\varepsilon\pi)^{2m} \quad 0 \leq \varepsilon < 1$$

гарантує нам абсолютну збіжність ряду (4.16) (при цьому, звичайно,  $R_{2m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ ).

Сума (4.16) має парну кількість доданків. Якщо б ми взяли суму, яка включає непарну кількість доданків, то ми б отримали трохи інший вираз для ряду. А саме

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k f(k) = f(2n) - \int_0^{2n} \tilde{A}(x) f'(x) dx,$$

де  $\tilde{A}(x) = 1/2 + P_1(x)$ , з тією ж функцією  $P_1(x)$ , що і в (4.13). Виконавши цілком аналогічні до попереднього викладки, отримаємо такий вираз

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2}(f(0) + f(2n)) - \sum_{k=1}^m \frac{2^{2k} - 1}{(2k)!} B_{2k} (f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(2n)) + \tilde{R}_{2m}, \quad (4.19)$$

де  $\tilde{R}_{2m}$  відрізняється від  $R_{2m}$  знаком та нижньою границею інтегрування (0 замість 1).

Метод Абеля застосовний також і для сум виду  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ . При цьому треба покласти

$$a_k = 1, \quad b(x) = f(x); \quad A(x) = [1+x] = x + 1/2 + Q_1(x), \quad \text{де } Q_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n},$$

а вираз  $[x]$  означає цілу частину числа  $x$ . Формула (4.11) дає

$$S_n = (n+1)f(n) - \int_0^n A(x) f'(x) dx = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) - \int_0^n Q_1(x) f'(x) dx.$$

Продовжуючи інтегрувати частинами, отримуємо формулу підсумовування Ейлера-Маклорена

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(n)) + R_{2m+1}. \quad (4.20)$$

Формули (4.16), (4.19) та (4.20) є основними при знаходженні асимптотики сум.

На кінець цього розділу наведемо без доказу формулу підсумовування Плана

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(t) dt + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (4.21)$$

де  $i$  — уявна одиниця. Ця формула справедлива, якщо:

1.  $f(z)$  — регулярна при  $\Re z \geq 0$ ;
2. рівність  $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-2\pi|y|} f(x + iy) = 0$  виконується рівномірно при  $0 \leq x < \infty$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|} |f(x + iy)| dy = 0$ .

## 5. Асимптотика інтегралів

В деяких випадках асимптотику інтеграла можна знайти без використання спеціальних методів. Найбільш типовими прийомами тут є:

- a) інтегрування частинами;
- b) розклад підінтегральної функції в ряд по малому параметру;
- c) розбиття інтервалу інтегрування на участки, в яких підінтегральна функція суттєво відрізняється за своєю поведінкою;
- d) знаходження функціональних співвідношень на інтеграл  $I(\lambda)$ <sup>1)</sup> з наступним дослідженням на асимптотику неявного рівняння;
- e) зведення складного інтегралу до стандартного типу (Фур'є, Лапласа) за допомогою вдалої заміни змінних

та інші. Проілюструємо ці методи на деяких прикладах.

**Приклад 11.** 
$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{1+x}} dx \quad (5.1)$$

a)  $\lambda \rightarrow \infty$ . Запишемо спочатку інтеграл (5.1) у вигляді

$$I(\lambda) = \Im \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{1+x}} dx \right). \quad (5.2)$$

Інтеграли виду (5.2) (Фур'є, Лапласа) з нескінченно диференційовною підінтегральною функцією є типовими інтегралами, до яких застосовний метод інтегру-

<sup>1)</sup> наприклад, типу рекурентних співвідношень.

вання частинами.<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\lambda} \int_0^\infty \frac{de^{i\lambda x}}{\sqrt{1+x}} &= \frac{i}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^\infty \frac{de^{i\lambda x}}{(1+x)^{3/2}} = \frac{i}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{3}{4\lambda^2} \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{(1+x)^{5/2}} dx = \\ &= \frac{i}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{3i}{4\lambda^3} + \frac{15i}{8\lambda^3} \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{(1+x)^{7/2}} dx \quad \text{і т.д.} \Rightarrow \\ &\Rightarrow I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{4\lambda^3} + \mathcal{O}(1/\lambda^5), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**б)  $\lambda \rightarrow 0$ .** Перш ніж знаходити точний а.р. спробуємо спочатку оцінити величину  $I(\lambda)$ . Для цього розіб'ємо інтеграл на два доданки

$$I(\lambda) = \int_0^{1/\lambda} + \int_{1/\lambda}^\infty = I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

$$I_1(\lambda) < \int_0^{1/\lambda} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} < \int_0^{1/\lambda} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \mathcal{O}(1/\sqrt{\lambda});$$

$$I_2(\lambda) = \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ t = \lambda x \end{array} \right/ = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{\lambda+t}} dt < \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \mathcal{O}(1/\sqrt{\lambda}).$$

Таким чином інтеграл  $I(\lambda)$  зростає як  $1/\sqrt{\lambda}$  при  $\lambda \rightarrow 0$  (в той час, як підінтегральна функція прямує до нуля!). Тому розглянемо функцію

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} I(\lambda) &= \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ t = \lambda x \end{array} \right/ = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t+\lambda}} dt = \int_\lambda^\infty \frac{\sin(t-\lambda)}{\sqrt{t}} dt = \cos \lambda \int_\lambda^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \\ &- \sin \lambda \int_\lambda^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \cos \lambda \left( \int_0^\infty - \int_0^\lambda \right) - \sin \lambda \left( \int_0^\infty - \int_0^\lambda \right) = \\ &= \cos \lambda \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\lambda \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right) - \sin \lambda \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\lambda \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Оскільки  $\lambda \rightarrow 0$ , то в інтегралах (5.3) ми можемо замінити функції  $\sin t$  та  $\cos t$  їх розкладами в ряд Тейлора та проінтегрувати почленно. В результаті отримаємо такий вираз

$$I = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \lambda^{2k+1}}{(2k+3/2)(2k+1)!} \right) \cos \lambda - \left( \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{(2k+1/2)(2k)!} \right) \sin \lambda. \quad (5.4)$$

Вираз (5.4) дозволяє нам знайти значення інтеграла  $I(\lambda)$  з будь-якою точністю (ряд (5.4) збіжний при всіх  $\lambda$ ). Для цього потрібно розкласти  $\sin \lambda$  та  $\cos \lambda$  в

<sup>2)</sup> Д. Ватсон називав цей прийом методом скучного інтегрування частинами. Далі в підрозділах 5.2 – 5.3 ми розглянемо більш зручний в практичному застосуванні метод.

ряд Тейлора та перемножити ці ряди з рядами, що стоять в дужках. Зокрема, з точністю до  $\lambda^{3/2}$

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} - \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{4}{3}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{3/2}).$$

**Приклад 12.**

$$I(\lambda) = \int_0^a \frac{e^{-\lambda x}}{\ln^2 x} dx, \quad 0 < a < 1; \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

**I спосіб.** При  $x \ll 1/\lambda$ ,  $e^{-\lambda x} \simeq 1$ , в той час як при  $x \gg 1/\lambda$  ця функція експоненційно мала. Тому розіб'ємо відрізок інтегрування на дві частини

$$I(\lambda) = \int_0^{1/\lambda} + \int_{1/\lambda}^a = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{1/\lambda} \frac{de^{-\lambda x}}{\ln^2 x} dx = -\frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{e \ln^2 \lambda} + 2 \int_0^{1/\lambda} \frac{e^{-\lambda x}}{x \ln^3 x} dx \right).$$

Оскільки на відрізку  $[0, 1]$ :  $e^{-x} = 1 + \mathcal{O}(x)$ , то і  $e^{-\lambda x} = 1 + \mathcal{O}(\lambda x)$ ,  $x \in [0, 1/\lambda]^3$ . Тому

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\lambda e \ln^2 \lambda} - \frac{2}{\lambda} \int_0^{1/\lambda} \frac{1 + \mathcal{O}(\lambda x)}{x \ln^3 x} dx = -\frac{1}{\lambda e \ln^2 \lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/\lambda} d\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) + \\ &+ \mathcal{O}\left(\int_0^{1/\lambda} \frac{dx}{|\ln^3 x|}\right) = \int_0^{1/\lambda} \frac{dx}{|\ln^3 x|} < \frac{1}{\ln^3 \lambda} \int_0^{1/\lambda} dx = \mathcal{O}(1/\lambda \ln^3 \lambda) / = \\ &= \frac{1 - 1/e}{\lambda \ln^2 \lambda} + \mathcal{O}(1/\lambda \ln^3 \lambda). \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$I_2 = \int_{t=\lambda x}^{\lambda a} \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} e^{-t} \left(1 - \frac{\ln t}{\ln \lambda}\right)^{-2} dt.$$

Для знаходження оцінки останнього інтеграла врахуємо, що  $1/(1-x)^2 = 1 + \mathcal{O}(x)$ ,  $x \in [-1, a]$ , тому

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \int_1^{\lambda a} e^{-t} (1 + \mathcal{O}(\ln t / \ln \lambda)) dt = \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \int_1^{\infty} e^{-t} (1 + \mathcal{O}(\ln t / \ln \lambda)) dt = \\ &= \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} (1/e + \mathcal{O}(1/\ln \lambda)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Об'єднуючи оцінки (5.6) та (5.7) знаходимо остаточно

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} (1 + \mathcal{O}(1/\ln \lambda)). \quad (5.8)$$

**II спосіб.** Вдалий вибір розбиття інтервалу інтегрування може спростити розрахунки. Як видно з попереднього, основний вклад в інтеграл вносить окіл точки

<sup>3)</sup> Всі  $\mathcal{O}$ -оцінки, які використовуються для підінтегральної функції, повинні виконуватись на всьому інтервалі інтегрування рівномірно по  $x$ .

$x_0 = 1/\lambda$ . Тому розіб'ємо відрізок  $[a, b]$  на дві частини так, щоб точка  $x_0$  попадала лише в одну з них, а інший відрізок мав би довжину, що набагато менша за  $1/\lambda$ . Цій умові відповідає розбиття

$$I(\lambda) = \int_0^{1/\lambda^2} + \int_{1/\lambda^2}^a = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \quad (5.9)$$

при цьому точка  $x_0$  належить лише другому інтегралу.

$$\tilde{I}_1 = \int_0^{1/\lambda^2} \frac{e^{-\lambda x}}{\ln^2 x} dx < \int_0^{1/\lambda^2} \frac{dx}{\ln^2 x} = \mathcal{O}(1/\lambda^2 \ln^2 \lambda) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ t = \lambda x \end{array} \right/ = \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \int_{1/\lambda}^{\lambda a} e^{-t} \left(1 - \frac{\ln t}{\ln \lambda}\right)^{-2} dt = \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \int_{1/\lambda}^{\lambda a} e^{-t} (1 + \mathcal{O}(\ln t / \ln \lambda)) dt \\ &= \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \left( \int_0^\infty e^{-t} dt + \mathcal{O}(1/\lambda) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda \ln^3 \lambda} \int_0^\infty e^{-t} |\ln t| dt\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} + \mathcal{O}(1/\lambda \ln^3 \lambda). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Взявши суму (5.10) та (5.11) отримуємо (5.8). Розбиття (5.9) не тільки спрощує розрахунки, але і дозволяє знайти повний а.р. Дійсно

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \int_{1/\lambda}^{\lambda a} e^{-t} \left(1 - \frac{\ln t}{\ln \lambda}\right)^{-2} dt = \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(\ln \lambda)^k} \int_{1/\lambda}^{\lambda a} e^{-t} (\ln t)^k dt = \\ &= \left/ \int_{1/\lambda}^{\lambda a} = \int_0^\infty - \int_0^{1/\lambda} - \int_{\lambda a}^\infty = \int_0^\infty + \mathcal{O}((\ln \lambda)^k / \lambda) \right/ = \\ &= \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\Gamma^{(k)}(1)}{(\ln \lambda)^k} + \mathcal{O}(1/\lambda^2 \ln^2 \lambda). \end{aligned}$$

Таким чином, враховуючи (5.10), маємо

$$I(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda \ln^2 \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\Gamma^{(k)}(1)}{(\ln \lambda)^k}.$$

**Приклад 13.**  $I_n = \int_0^\pi x^n \sin x dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.12)$

Проінтегруємо (5.12) двічі частинами

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n+1} \int_0^\pi \sin x dx^{n+1} = \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \int_0^\pi x^{n+2} \sin x dx = \\ &= \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{I_{n+2}}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Рівність (5.13) дає нам рекурентне співвідношення, що пов'язує  $I_n$  з  $I_{n+2}$ . Оскільки  $I_n > 0$ , то

$$I_n < \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{тобто} \quad I_n = \mathcal{O}(\pi^n/n^2). \quad (5.14)$$



Використовуючи (5.14) для другого доданку в (5.13) отримуємо таку оцінку

$$\frac{I_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \mathcal{O}(\pi^n/n^4).$$

Таким чином, рівняння (5.13) приймає вигляд

$$I_n = \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)(n+2)} (1 + \mathcal{O}(1/n^2)) = \frac{\pi^{n+2}}{n^2} \left(1 - \frac{3}{n} + \mathcal{O}(1/n^2)\right). \quad (5.15)$$

Оцінку (5.15) можна і далі уточнювати. Для цього застосуємо метод ітерацій. Підставимо вираз (5.15) в праву частину (5.13). В результаті, розклавши (5.13) в ряд по степеням  $1/n$ , отримаємо

$$I_n = \frac{\pi^{n+2}}{n^2} \left(1 - \frac{3}{n} - \frac{\pi^2 - 7}{n^2} + \frac{10\pi^2 - 15}{n^3} + \mathcal{O}(1/n^4)\right). \quad (5.16)$$

Таким способом ми можемо знайти стільки асимптотичних доданків, скільки потрібно. Для знаходження загального виразу для а.р. інтеграла  $I_n$  краще підставляти в праву частину (5.13) не асимптотичну рівність (5.15), а точне співвідношення (5.13), де треба замінити  $n$  на  $n+2$ . Це дає:

$$I_n = \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{I_{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}. \quad (5.17)$$

Ясно, що продовжуючи цей прийом ми одержимо для  $I_n$  таку формулу

$$I_n = \pi^n \left( \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1} \pi^{2k}}{\prod_{p=1}^{2k} (n+p)} + \mathcal{O}(n^{-2N-2}) \right), \quad (5.18)$$

де ми за допомогою (5.14) замінили залишковий доданок відповідною  $\mathcal{O}$ -оцінкою. Залишається лише розкласти вираз (5.18) в ряд по степеням  $1/n$ . Ці розрахунки хоча і елементарні по суті, але досить громіздкі. В підрозділі 5.2 ми познайомимося з методом Лапласа, за допомогою якого можна отримати загальну формулу для коефіцієнтів  $c_k$  асимптотичного ряду  $I_n$ . Ми розглянемо цю задачу в прикладі 17.

## 5.1 Інтеграли Фур'є. Метод стаціонарної фази.

В цьому підрозділі ми розглянемо інтеграли виду

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (5.19)$$

які будемо називати інтегралами Фур'є. Функція  $S(x)$  вважається дійсною.

**Лема Рімана - Лебега.** Нехай інтеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  — збігається. Тоді<sup>4)</sup>

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Будемо називати точки, в яких  $S'(x) = 0$  — стаціонарними, а саму функцію  $S(x)$  — фазовою функцією або просто фазою. Можливі два випадки: а) на  $(a, b)$   $S'(x) \neq 0$  та б) на  $(a, b)$  існує хоча б одна стаціонарна точка.

**Теорема 5.1** Нехай функції  $f(x)$  та  $S(x)$  з (5.19) неперервно диференційовні на відрізьку  $[a, b]$   $N$  та  $N + 1$  разів відповідно і  $S'(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Тоді

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} (b_n - a_n) \lambda^{-n-1} + o(\lambda^{-N}), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (5.20)$$

$$\text{де } a_n = e^{i\lambda S(a)} i^{n-1} \left\{ \left( \frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{f(x)}{S'(x)} \right) \right\}_{x=a} \quad (5.21)$$

і аналогічно для  $b_n$  з заміною  $a$  на  $b$ .

Теорема доводиться  $N$  — кратним інтегруванням частинами та застосуванням леми Рімана - Лебега до залишкового інтегралу. Таким чином

а) коли  $f(x)$  та  $S(x)$  — нескінченно диференційовні і  $S'(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ , то  $I(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1})$ ;  
 б) для знаходження асимптотичного ряду застосовний метод інтегрування частинами.

Метод інтегрування частинами іноді може бути застосовний і у випадку, коли  $S'(x) = 0$  на одному з кінців інтервалу  $(a, b)$ . Як видно з доведення теореми 5.1, для застосовності розкладу (5.20) необхідно лише, щоб вираз в фігурних дужках (формула (5.21)) був обмеженим на всьому інтервалі інтегрування. Для цього необхідно (але не достатньо), щоб функція  $f(x)$  оберталася в нуль в тих же точках, що і  $S'(x)$ . Розглянемо приклад.

**Приклад 14.** 
$$I(\lambda) = \int_0^\pi e^{i\lambda x^2} \sin x dx, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Хоча  $S'(0) = 0$ , але метод інтегрування частинами застосовний. Дійсно

$$I(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} d e^{i\lambda x^2} = \frac{i}{2\lambda} + \frac{i}{2\lambda} \int_0^\pi e^{i\lambda x^2} \left( \frac{\sin x}{x} \right)' dx. \quad (5.22)$$

Продовжуючи інтегрувати частинами, ми завжди будемо мати скінченні значення для коефіцієнтів  $a_n$  та  $b_n$  і обмежену на  $[0, \pi]$  підінтегральну функцію. Щоб довести це, звернемо увагу на те, що функція  $f(x) = \sin x$  є непарною і тому

<sup>4)</sup> Інтервал  $(a, b)$  може бути як скінченим, так і нескінченим.

її розклад в ряд Маклорена буде мати лише непарні степені  $x$ . За рахунок цього, відношення  $f(x)/x$ , яке з'являється при інтегруванні частинами, є обмеженим в нулі. Після першого інтегрування частинами, ми одержимо нову функцію  $\tilde{f}(x) = (f(x)/x)'$ , яка також буде непарною (оскільки функція  $f(x)/x$  — парна). Подальша можливість інтегрування частинами доводиться за індукцією: непарність підінтегральної функції  $\tilde{f}(x)$  гарантує обмеженість в нулі виразу  $\tilde{f}(x)/x$ .

**Лема Ватсона.** *Нехай  $f(x)$  — нескінченно диференційовна на  $[0, a]$  функція і  $0 < \beta < \alpha$ . Позначимо  $n$  — таке ціле число, що  $\beta + n < \alpha$ , а  $\beta + n + 1 \geq \alpha$ . Тоді при  $\lambda \rightarrow \infty$*

$$\int_0^a e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta-1} f(x) dx = \sum_{k=0}^n e^{i\frac{\pi(\beta+k)}{2\alpha}} \frac{f^{(k)}(0)}{\alpha k!} \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}). \quad (5.23)$$

**Доведення.**

$$\int_0^a e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta-1} f(x) dx = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^a = \int_0^\varepsilon + \mathcal{O}(1/\lambda), \quad 0 < \varepsilon < a.$$

Для оцінки останнього інтегралу ми застосували теорему 5.1. Оскільки функція  $f(x)$  нескінченно диференційовна, виберемо значення  $\varepsilon$  таким, щоб в середині інтервалу  $(0, \varepsilon)$   $f(x)$  представлялася рядом Тейлора. Тоді (нижче  $n$  теж саме, що і в умові теореми)

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta-1} f(x) dx &= \int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta-1} \left( \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}) \right) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta+k-1} dx + \mathcal{O}\left( \int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta+n} dx \right); \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta+k-1} dx = \int_0^\infty - \int_\varepsilon^\infty = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) e^{i\frac{\pi(\beta+k)}{2\alpha}} \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}), \quad k = \overline{0, n}. \quad (5.25)$$

Оцінимо тепер останній доданок в (5.24).

$$I = \int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta+n} dx = \frac{1}{i\alpha\lambda} \int_0^\varepsilon x^\mu de^{ix^\alpha} = \mathcal{O}(1/\lambda) + \frac{\mu}{i\alpha\lambda} \int_0^\varepsilon e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta+n-\alpha} dx, \quad (5.26)$$

де  $\mu = \beta + n + 1 - \alpha$ . Якщо  $\beta + n + 1 = \alpha$ , то  $\mu = 0$  і інтеграл  $I$  має порядок  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ . Якщо ж  $\mu > 0$ , то для  $I$  отримуємо

$$I = \mathcal{O}(1/\lambda) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\varepsilon x^{\beta+n-\alpha} dx\right) = \mathcal{O}(1/\lambda).$$

Таким чином, залишковий доданок в (5.24) має порядок  $\mathcal{O}(1/\lambda)$  і з (5.25) впливає (5.23).

**Зауваження 1.** Якщо  $\beta \geq \alpha$ , то провівши викладки аналогічні (5.26), знаходимо, що інтеграл (5.23) має порядок  $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$ . В цьому випадку головний член а.р. визначається не околom точки  $x = 0$ , вклад від якої  $\simeq \lambda^{-\beta/\alpha}$ , а кінцевою точкою  $x = a$ , вклад від якої  $\simeq 1/\lambda$ .

**Приклад 15.** 
$$I(x) = \int_1^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Скрізь до цього ми розглядали лише інтеграли зі скінченими межами. Але наявність нескінченного інтервалу, як правило, не приводить до ускладнень

$$I(x) = \int_1^2 + \int_2^\infty = \int_1^2 + \mathcal{O}(1/x) = \tilde{I}(x) + \mathcal{O}(1/x), \quad \text{де } \tilde{I} = \int_1^2.$$

Для оцінки інтегралу  $\int_2^\infty$  ми застосували метод інтегрування частинами та лему Рімана - Лебега. До інтегралу  $\tilde{I}(x)$  застосовна лема Ватсона

$$\tilde{I}(x) = \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ t-1 = \tau \end{array} \right/ = \Im \left( e^{ix} \int_0^1 \frac{e^{ix\tau}}{\sqrt{\tau(\tau+2)}} d\tau \right).$$

Тут  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $f(x) = 1/\sqrt{2+x}$ . Тому

$$I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sin(x + \pi/4) + \mathcal{O}(1/x).$$

В умові теореми 5.1 зазначається, що на  $[a, b]$   $S'(x) \neq 0$ , тобто на відрізку інтегрування відсутні стаціонарні точки. При цьому інтеграл асимптотично веде себе як  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ . Наявність стаціонарної точки суттєво змінює асимптотичну поведінку інтеграла. Щоб зрозуміти причину цього, достатньо уявити собі графік функції  $\cos \lambda x^2$ , яка передає поведінку експоненційного множника  $e^{i\lambda S(x)}$  в околі стаціонарної точки<sup>5)</sup>. На проміжку  $\Delta x \simeq 1/\sqrt{\lambda}$  функція  $\cos \lambda x^2$  є знако-сталюю, тому і вклад в інтеграл від цієї області буде порядку  $1/\sqrt{\lambda}$ . В околі ж будь-якої іншої точки (не стаціонарної) функція  $e^{i\lambda S(x)}$  швидко осцилює з періодом  $\simeq 1/\lambda$ . Це приводить до того, що сума інтегралів по сусіднім відрізкам, на яких  $\cos(\lambda S(x))$  (або  $\sin(\lambda S)$ , якщо ми розглядаємо уявну частину інтеграла) має різні знаки, прямує до нуля принаймні як  $\simeq 1/\lambda^2$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ <sup>6)</sup>. За рахунок цього, інтеграл по скінченному відрізку, на якому укладається  $N \simeq \lambda(b-a)$  періодів функції  $\cos(\lambda S(x))$ , буде мати величину порядку  $N \cdot 1/\lambda^2 \simeq 1/\lambda$ , тобто менше ніж від стаціонарної точки.

<sup>5)</sup> В  $\delta$ -околі стаціонарної точки  $x_0 = 0$  з  $\delta \simeq 1/\sqrt{\lambda}$   
 $e^{i\lambda S(x)} = e^{i\lambda S_0} \cdot e^{i\lambda(S_0''x^2/2 + S_0'''x^3/6 + \dots)} \approx e^{i\lambda S_0} \cdot e^{i\lambda S_0''x^2/2} = e^{i\lambda S_0} (\cos \alpha \lambda x^2 + i \sin \alpha \lambda x^2)$ , де  $\alpha = S_0''/2$ .

<sup>6)</sup> Для цього достатньо, щоб функція  $f(x)$ , яка стоїть при експоненті  $e^{i\lambda S(x)}$ , мала обмежену похідну на  $(a, b)$  і тому в околі будь-якої точки  $x_0$  для неї виконується оцінка  $f(x) = f_0 + \mathcal{O}(|x - x_0|)$

Розглянемо тепер докладніше випадок, коли в середині інтервала  $[a, b]$  знаходиться одна або кілька стаціонарних точок.

**Теорема 5.2** *Нехай  $f(x)$  — неперервно диференційовна, а  $S(x)$  — двічі неперервно диференційована на  $[a, b]$  функція і  $S(x)$  має єдину стаціонарну точку  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$ . Тоді якщо  $S''(x_0) \neq 0$ , то*

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = e^{i\lambda S(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4}\delta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} f(x_0) + \mathcal{O}(1/\lambda), \quad (5.27)$$

де  $\delta = \text{sign } S''(x_0)$ .

**Доведення.** Розіб'ємо інтеграл  $I(\lambda)$  на три частини

$$I(\lambda) = \int_a^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^b. \quad (5.28)$$

В першому та в третьому інтегралах  $S'(x) \neq 0$ , тому згідно з теоремою 5.1 ці інтеграли мають порядок  $\mathcal{O}(1/\lambda)$ . В другому інтегралі (5.28) розкладемо функції  $f(x)$  та  $S(x)$  в ряд Тейлора в околі точки  $x_0$ .

$$f(x) = f_0 + f'_0(x - x_0) + \dots, \quad S(x) = S_0 + \frac{1}{2}S''_0(x - x_0)^2 + \dots$$

де індексом "0" ми позначили значення відповідних функцій в точці  $x_0$ .

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} = e^{i\lambda S_0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\lambda(1/2S''_0 t^2 + \dots)} (f_0 + f'_0 t + \dots) dt. \quad (5.29)$$

Перейдемо в (5.29) до нової змінної  $\tau$ , яку визначимо з рівності:

$$\frac{1}{2}S''_0 \tau^2 = \frac{1}{2}S''_0 t^2 + \frac{1}{3!}S'''_0 t^3 + \dots \Rightarrow \tau = t \left( 1 + \frac{S'''_0}{3S''_0} t + \dots \right)^{1/2}.$$

Звідки знаходимо

$$t = \tau(1 + \mathcal{O}(\tau)), \quad dt = d\tau(1 + \mathcal{O}(\tau)).$$

В змінній  $\tau$  інтеграл (5.29) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} e^{i\lambda S''_0 \tau^2/2} f_0(1 + \mathcal{O}(\tau)) d\tau = f_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} e^{i\lambda S''_0 \tau^2/2} d\tau + \mathcal{O}\left(\int_{-\delta_1}^{\delta_2} e^{i\lambda S''_0 \tau^2/2} \tau d\tau\right) = \\ &= f_0 \left( \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-\delta_1} - \int_{\delta_2}^{\infty} \right) + \mathcal{O}(1/\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4}\delta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} f(x_0) + \mathcal{O}(1/\lambda). \end{aligned}$$

Підставивши цей вираз в (5.28), отримуємо (5.27).

Якщо на відрізку інтегрування є кілька стаціонарних точок, то головний асимптотичний доданок є сумою вкладів (5.27) від кожної з них.

**Приклад 16.** 
$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (5.30)$$

**I спосіб.** Підінтегральна функція має дві особливі точки  $t = \pm 1$ . Але, враховуючи симетрію функції, ми можемо розглянути лише одну з них, оскільки

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-1}^0 + \int_0^1 \right) = \frac{2}{\pi} \Re \left( \int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) = \\ &= \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ 1-t = \tau \end{array} \right/ = \frac{2}{\pi} \Re \left( e^{ix} \int_0^1 \frac{e^{-i\tau}}{\sqrt{\tau(2-\tau)}} d\tau \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

До інтеграла (5.31) застосовна лема Ватсона, де треба покласти  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$  і взяти комплексне спряження від лівої та правої частин. Тому

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \Re \left( e^{ix} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-i\pi/4} + \mathcal{O}(1/x) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) + \mathcal{O}(1/x).$$

**II спосіб.** Зробимо в (5.30) заміну змінної  $t = \sin \tau$ , де  $\tau$  — нова змінна. В результаті (5.30) прийме вигляд

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ix \sin \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{ix \sin \tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \tau} d\tau.$$

Фазова функція  $S(\tau) = \sin \tau$  має дві стаціонарні точки  $\tau_{1,2} = \pm \pi/2$ . В цих точках  $S(\tau_{1,2}) = \pm 1$ ,  $S''(\tau_{1,2}) = \mp 1$ , тому, як видно з формули (5.27), вклад цих точок в інтеграл є комплексно спряженим один до одного. Таким чином

$$J_0(x) = 2 \Re \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{ix} e^{-i\pi/4} + \mathcal{O}(1/x) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) + \mathcal{O}(1/x).$$

Узагальненням теореми 5.1 є наступна теорема.

**Теорема 5.3** *Нехай функції  $f(x)$  та  $S(x)$  — нескінченно диференційовні на відрізку  $[a, b]$  і  $S'(x_j) = 0$ ,  $x_j \in (a, b)$ <sup>7)</sup>,  $j = \overline{1, n}$ . Тоді*

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) \lambda^{-n-1} + \sum_{j=1}^n \left( e^{i\lambda S(x_j)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} \lambda^{-n-1/2} \right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

де коефіцієнти  $a_k$  та  $b_k$  даються виразами (5.21).

Схему доведення цієї теореми, а також метод знаходження коефіцієнтів  $c_k^{(j)}$ , ми розглянемо в підрозділі 5.3.

Недоліком методу стаціонарної фази є те, що він, як правило, дозволяє знайти лише кілька перших членів а.р. Інші, більш потужніші методи ми розглянемо в підрозділах 5.2 – 5.3.

<sup>7)</sup> Стаціонарні точки  $x_j$  належать інтервалу  $(a, b)$ , тобто є внутрішніми точками з  $(a, b)$ .

## 5.2 Інтеграл Лапласа

Будемо називати інтеграл виду

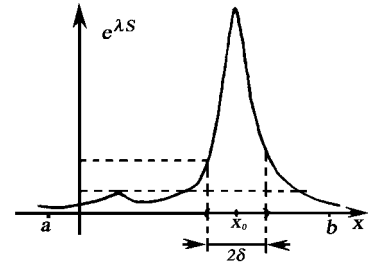
$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.32)$$

інтегралами Лапласа. Функція  $S(x)$  вважається дійсною, в той час як  $f(x)$  може бути і комплексною. Нас буде цікавити асимптотична поведінка інтеграла  $I(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Метод, який ми зараз розглянемо, називається методом Лапласа. Інтервал  $(a, b)$  будемо вважати скінченним, а функції  $f(x)$  та  $S(x)$  — нескінченно диференційовними на  $[a, b]$ <sup>8)</sup>.

Суть метода Лапласа полягає в наступному. На відрізку  $[a, b]$  знайдемо точку  $x_0$ , в якій  $S(x)$  досягає абсолютного максимуму, тобто  $S(x) \leq S(x_0) = S_0$ ,  $x \in [a, b]$ . Не порушуючи загальності ми можемо вважати, що така точка лише одна<sup>9)</sup>. Виділимо невеликий  $\delta$ -окіл точки  $x_0$  ( $O_\delta(x_0) \subset [a, b]$ ) такий, що в середині нього: а)  $S(x)$  має лише один локальний максимум (точку  $x_0$ ) і б) найменше значення  $S(x)$ , позначимо його  $S_0 - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , задовольняє умові

$$S_0 - \epsilon \geq S(x), \quad x \in \Omega = [a, b] \setminus O_\delta(x_0),$$

тобто в точках з  $[a, b]$ , що не належать  $O_\delta(x_0)$  (в області  $\Omega$ )  $S(x) \leq S_0 - \epsilon$  (дивись малюнок 8).



Мал. 8

Ключовим моментом метода Лапласа є наступний висновок: оскільки функція  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$  (а значить і обмежена), то внесок в інтеграл  $I(\lambda)$  від області  $\Omega$  буде експоненційно малим в порівнянні з внеском в  $I(\lambda)$  від  $\delta$ -околу точки  $x_0$ . Дійсно, позначимо  $C = \sup |f(x)|$ ,  $x \in [a, b]$ . Тоді

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x)e^{\lambda S(x)} dx \right| &\leq C \int_{\Omega} e^{\lambda S(x)} dx < C \int_a^b e^{\lambda(S_0 - \epsilon)} dx = e^{\lambda S_0} \mathcal{O}(e^{-\lambda \epsilon}) \Rightarrow \\ \Rightarrow I(\lambda) &= e^{\lambda S_0} \left( \int_{O_\delta(x_0)} e^{\lambda(S(x) - S_0)} f(x) dx + \mathcal{O}(e^{-\lambda \epsilon}) \right) = e^{\lambda S_0} (I_1(\lambda) + \text{е.м.ч.}), \end{aligned}$$

де е.м.ч. — експоненційно малі члени<sup>10)</sup>. Нижче ми покажемо, що інтеграл  $I_1$  має порядок  $\mathcal{O}(1/\sqrt{\lambda})$ , якщо в точці  $x_0$   $S'(x) = 0$ <sup>11)</sup>, або  $\mathcal{O}(1/\lambda)$  — в протилежному випадку. Таким чином

<sup>8)</sup> Випадки, коли ці умови не виконуються, ми розглянемо окремо на конкретних прикладах.

<sup>9)</sup> Якщо на  $[a, b]$  існує кілька точок  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  таких, що  $S(x_1) = S(x_2) = \dots = S(x_n)$  і  $S(x) \leq S(x_i)$ , то ми завжди можемо розбити відрізок  $[a, b]$  на  $n$  частин таким чином, що на кожному з менших відрізків буде лише одна з точок  $x_i$ . Тоді асимптотика всього інтеграла  $I(\lambda)$  є сумою асимптотик на кожному з  $n$  відрізків.

<sup>10)</sup> Функція  $f(x)$  називається експоненційно малою, якщо для неї виконується оцінка:

$$f(x) = o(x^{-m}), \quad \forall m (x \rightarrow \infty).$$

<sup>11)</sup> Припускається, що  $S''(x_0) \neq 0$ . Якщо ж  $S''(x_0) = \dots = S^{(2n-1)}(x_0) = 0$ ,  $S^{(2n)}(x_0) \neq 0$ , то  $I(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/2n})$ .

з експоненційною точністю а.р. для  $I(\lambda)$  визначається поведінкою підінтегральної функції в околі точки максимуму фази  $S(x)$  з відрізка інтегрування  $[a, b]$ .

Тепер вже неважко знайти повний а.р. для  $I_1(\lambda)$  (а значить і для  $I(\lambda)$ ). Далі йде суто технічна частина.

Виберемо величину  $\delta$  такою, щоб в середині інтервала  $O_\delta(x_0)$  функції  $f(x)$  та  $S(x)$  представлялися своїми рядами Тейлора. Можливі два випадки.

**1) Точка  $x_0$  — внутрішня ( $a < x_0 < b$ ).** Нехай  $S''(x_0) \neq 0$ . Будемо вважати, що  $x_0 = 0$  (якщо це не так, перейдемо до нової змінної  $x' = x - x_0$ ). В цьому разі

$$\begin{aligned} S(x) - S_0 &= \frac{1}{2}S_0''x^2 + \frac{1}{6}S_0'''x^3 + \dots = -x^2(\alpha + \beta x + \dots) = -y^2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= x(\alpha + \beta x + \dots)^{1/2} = \tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}x^2 + \dots \quad \tilde{\alpha} \neq 0, \end{aligned}$$

де  $y$  — нова незалежна змінна. Застосовуючи формулу обернення Лагранжа, ми можемо виразити  $x$  як функцію від  $y$ :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k \quad \Rightarrow \quad dx = \left( \sum_{k=1}^{\infty} k c_k y^{k-1} \right) dy; \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k y^k,$$

де константи  $c_k$  та  $d_k$  визначаються формулами (3.2) та (3.3). В новій змінній  $y$  інтеграл  $I_1$  прийме вигляд

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \left( f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k y^k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} k c_k y^{k-1} \right) e^{-\lambda y^2} dy = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \right) e^{-\lambda y^2} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} - \left( \int_{-\infty}^{-\delta_1} + \int_{\delta_2}^{\infty} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} + \text{е.м.ч.} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k} (2k-1)!!}{2^k \lambda^k} + \text{е.м.ч.} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow I(\lambda) &= e^{\lambda S_0} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!! a_{2k}}{2^k \lambda^k} + \text{е.м.ч.} \right). \end{aligned}$$

Зокрема, головний асимптотичний доданок дається формулою

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S_0''|}} e^{\lambda S_0} (f(x_0) + \mathcal{O}(1/\lambda)). \quad (5.33)$$

Випадок, коли  $S''(x_0) = \dots = S^{(2n-1)}(x_0) = 0$ ,  $S^{(2n)}(x_0) \neq 0$  розглядається аналогічно. В цьому разі:

$$S(x) - S_0 = \frac{1}{n!} S_0^{(2n)} x^{2n} + \dots = -y^{2n} \quad \Rightarrow \quad y = x(\alpha + \beta x + \dots)^{1/2n}$$

і далі за стандартною схемою.



**2) Точка  $x_0$  — гранична ( $x_0 = a$ ) і  $S'(x_0) \neq 0$ .** Знову таки, ми можемо вважати, що  $x_0 = 0$ .

$$S(x) - S_0 = S'_0 x + \frac{1}{2} S''_0 x^2 + \dots = -x(\alpha + \beta x + \dots) = -y \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k.$$

Далі йдуть цілком аналогічні до попереднього викладки. Відмінність полягає лише в тому, що тепер всі інтегрування будуть проводитись не від  $-\delta$  до  $\delta$  (або  $-\infty$  до  $\infty$ ), а від  $0$  до  $\delta$  (відповідно, від  $0$  до  $\infty$ ).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\delta} \left( f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k y^k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} k c_k y^{k-1} \right) e^{-\lambda y} dy = \int_0^{\delta} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \right) e^{-\lambda y} dy = \\ &= \int_0^{\infty} - \int_{\delta}^{\infty} = \int_0^{\infty} + \text{е.м.ч.} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! a_k}{\lambda^{k+1}} + \text{е.м.ч.} \end{aligned}$$

Узагальнення на випадок, коли  $S'(x_0) = \dots = S^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $S^{(n)}(x_0) \neq 0$  — очевидно.

На практиці, коли потрібно знайти лише кілька перших членів а.р., часто зручніше не переходити до нової змінної  $y$ , а записувати

$$e^{\lambda(S(x)-S_0)} = e^{\lambda S''_0 x^2/2} \cdot e^{\lambda(S''_0 x^3/6 + \dots)} = e^{\lambda S''_0 x^2/2} \left( 1 + \frac{\lambda S''_0 x^3}{6} + \dots \right),$$

розкладаючи другу експоненту (а також функцію  $f(x)$ ) в ряд Маклорена і враховуючи стільки доданків, скільки потрібно.

**Приклад 17.** 
$$I_n = \int_0^{\pi} x^n \sin x \, dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.34)$$

**II спосіб.**<sup>12)</sup> Знову проінтегруємо (5.34) частинами, але тепер під знак диференціала внесемо  $\sin x$ .

$$I_n = - \int_0^{\pi} x^n d \cos x = \pi^n + n \int_0^{\pi} x^{n-1} \cos x \, dx.$$

Перейдемо в інтегралі до нової змінної  $\tau$ :  $x = \pi e^{-\tau}$ .

$$I_n = \pi^n \left( 1 + n \int_0^{\infty} e^{-n\tau} \cos \pi e^{-\tau} d\tau \right). \quad (5.35)$$

Інтеграл (5.35) має вигляд інтеграла Лапласа з нескінченною областю інтегрування. Але, як легко переконатися, нескінченна верхня границя ніяк не впливає на метод розрахунку а.р., оскільки

$$I_n = \pi^n + n\pi^n \left( \int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) = \pi^n \left( 1 + n \int_0^1 + \mathcal{O}(e^{-n}) \right).$$

<sup>12)</sup> Дивись приклад 13.

Таким чином, для знаходження а.р. нам необхідно розкласти  $\cos \pi e^{-\tau}$  в ряд Маклорена і проінтегрувати почленно. В результаті отримуємо

$$I_n \sim \pi^n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{n^k}, \quad \text{де } c_k \text{ визначаються з розкладу } \cos(\pi e^{-\tau}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \tau^k. \quad (5.36)$$

Знаходити коефіцієнти  $c_k$  з формули (5.36) набагато простіше, ніж розкласти в ряд вираз (5.18).

Всі ті перетворення, які робились, щоб привести інтеграл (5.34) до вигляду (5.35), необхідні лише для того, щоб отримати загальну формулу (5.36) на коефіцієнти  $c_k$ . Якщо ж нам необхідно знайти лише кілька перших членів розкладу, то ми просто записуємо

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{n \ln x} \sin x \, dx.$$

На відрізку  $[0, \pi]$  функція  $\ln x$  досягає максимуму в точці  $x = \pi$ . Тому, розкладаємо  $\sin x$  та  $\ln x$  в ряд в околі  $x = \pi$  і інтегруємо почленно. Наприклад, для головного доданка отримуємо:

$$\begin{aligned} n \ln x &= n \ln \pi + \frac{n}{\pi}(x - \pi) + \mathcal{O}((x - \pi)^2), \quad \sin x = \pi - x + \mathcal{O}((x - \pi)^3); \\ I_n &\sim \int_{t = \pi - x}^{\pi} e^{-nt/\pi} t \, dt \sim \pi^n \int_0^{\infty} e^{-nt/\pi} t \, dt = \frac{\pi^{n+2}}{n^2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Аналогічно тому, як ми розібралися з нескінченною верхньою границею в інтегралі (5.35) доводиться і наступна лема.

**Лема Ватсона.** *Нехай  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , а функція  $f(x)$  — неперервна на  $[0, \infty)$  і представляється в околі точки  $x = 0$  рядом Тейлора. Тоді при  $\lambda \rightarrow \infty$*

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^{\alpha}} x^{\beta-1} f(x) \, dx \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-\frac{n+\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (5.38)$$

Ряд (5.38) отримується почленим інтегруванням ряду Тейлора функції  $f(x)$  (дивись формулу I.1 з додатку 1).

**Приклад 18.** 
$$I(\lambda) = \int_0^1 e^{-1/x} e^{-\lambda x^2} \, dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

Цей інтеграл має вигляд (5.32), де  $f(x) = e^{-1/x}$ ,  $S(x) = -x^2$ . Функція  $S(x)$  має максимум в точці  $x = 0$ . Тому, за стандартною схемою, ми повинні розкласти функцію  $f(x)$  в ряд Маклорена і проінтегрувати почленно. Але, ряд Маклорена для  $f(x) = e^{-1/x}$  складається з одних нулів. Це означає, що  $I(\lambda) = o(x^{-m})$ ,  $\forall m$ , тобто інтеграл (5.39) експоненційно малий. Щоб уточнити цю оцінку дослідимо на максимум всю підінтегральну функцію  $e^{S(\lambda, x)}$ :

$$S'(\lambda, x) = (-1/x - \lambda x^2)' = 1/x^2 - 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1/(2\lambda)^{1/3} = 1/\sigma,$$

де  $\sigma = (2\lambda)^{1/3}$ , тобто максимум досягається в точці  $x_0$ , яка є функцією від  $\lambda$  і при  $\lambda \rightarrow \infty$  наближається до однієї із границь інтегрування (точки  $x = 0$ ). В цьому разі застосовувати метод Лапласа безпосередньо до функції  $S(x, \lambda)$ , взагалі-то кажучи, не завжди можна (дивись зауваження 2 нижче)<sup>13</sup>). Краще скористатися наступним прийомом. Перейдемо до нової змінної  $\tau = x/x_0 - 1$ . В змінній  $\tau$  підінтегральна функція досягає максимуму в точці  $\tau = 0$  (яка не залежить від  $\lambda$ ), а інтеграл (5.39) приймає вигляд

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sigma} \int_{-1}^{\sigma-1} e^{-\sigma S(\tau)} d\tau, \quad \text{де} \quad S(\tau) = \frac{1}{1+\tau} + \frac{(1+\tau)^2}{2}. \quad (5.40)$$

Інтеграл (5.40) знову має вигляд інтеграла Лапласа, де тепер максимум  $-S(\tau)$  досягається в точці  $\tau = 0$ . Те, що верхня межа в інтегралі (5.40) залежить від  $\lambda$  для нас не суттєво, оскільки

$$\int_{-1}^{\sigma-1} e^{-\sigma S(\tau)} d\tau = \int_{-1}^1 + \int_1^{\sigma-1}; \quad \int_1^{\sigma-1} < \int_1^{\sigma-1} e^{-\sigma(\tau+1)^2/2} d\tau < \int_2^{\infty} e^{-\sigma\tau^2/2} d\tau = \mathcal{O}(e^{-2\sigma}/\sigma)$$

і як буде видно з подальшого, інтеграл  $\int_{-1}^{\sigma-1}$  експоненційно малий в порівнянні з інтегралом  $\int_{-1}^1$ , до якого застосуємо формулу (5.33):

$$I(\lambda) = \frac{e^{-\frac{3}{2}(2\lambda)^{1/3}}}{(2\lambda)^{1/3}} \left( \int_{-1}^1 e^{-(2\lambda)^{1/3}(S(\tau)-3/2)} d\tau + \text{е.м.ч.} \right) = \left( \frac{\pi}{3\lambda} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}(2\lambda)^{1/3}} (1 + \mathcal{O}(1/\lambda)).$$

**Приклад 19.** Знайдемо асимптотику  $\Gamma$  – функції (формула Стірлінга).

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (5.41)$$

Перепишемо (5.41) у вигляді

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{x \ln t} dt, \quad x \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Інтеграл (5.42) має вигляд інтеграла Лапласа, але тут  $S(t) = \ln t$  і досягає максимуму при  $t \rightarrow \infty$ , тобто до інтеграла в формі (5.42) метод Лапласа не застосовний. Тому, як і в попередньому прикладі, дослідимо на максимум всю підінтегральну функцію.

$$(-t + x \ln t)' = -1 + x/t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = x.$$

Перейдемо до нової змінної  $\tau = t/x - 1$ . В змінній  $\tau$  функція  $S(\tau)$  досягає максимуму в точці  $\tau = 0$ , а інтеграл приймає вигляд інтеграла Лапласа.

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{\infty} e^{-x(\tau - \ln(1+\tau))} d\tau = x^{x+1} e^{-x} \left( \int_{-1}^1 + \int_1^{\infty} \right) = x^{x+1} e^{-x} \left( \int_{-1}^1 + \text{е.м.ч.} \right)$$

<sup>13</sup>) Хоча в даному випадку ми б отримали правильний результат. Це видно з того, що область впливу точки  $x_0$  (тобто область, в межах якої функція  $e^{S(\lambda, x)}$  є величиною порядку  $e^{S(\lambda, x_0)}$ ) дорівнює  $\Delta x \simeq 1/\sqrt{\lambda}$  і набагато менша довжини відрізка  $[0, x_0]$ , який має порядок  $\Delta x \simeq 1/\lambda^{1/3}$ . Тому ми можемо замінити нижню границю інтеграла на  $-\infty$ .

Далі, за стандартною схемою, розкладаємо  $e^{xS(\tau)}$  в ряд Маклорена і інтегруємо почленно в межах від  $-\infty$  до  $\infty$ .

$$S(\tau) = -\tau + \ln(1 + \tau) = -\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} + \mathcal{O}(\tau^5);$$

$$e^{xS(\tau)} = e^{-x\tau^2/2} e^{x(\tau^3/3 - \tau^4/4 + \mathcal{O}(\tau^5))} d\tau = e^{-x\tau^2/2} \left( 1 + \frac{x\tau^3}{3} - \frac{x\tau^4}{4} + \frac{x^2\tau^6}{18} + \mathcal{O}(x\tau^5) \right);$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau^2/2} \left( 1 + \frac{x\tau^3}{3} - \frac{x\tau^4}{4} + \frac{x^2\tau^6}{18} + \mathcal{O}(x\tau^5) \right) d\tau = \\ &= \sqrt{2\pi x} \left( \frac{x}{e} \right)^x (1 + 1/12x + \mathcal{O}(x^{-2})). \end{aligned} \quad (5.43)$$

**Зауваження 2.** В прикладах 18,19 ми шукали максимум всього підінтегрального виразу. При цьому точка максимуму  $t_0$  була функцією від параметра  $\lambda$  і наближалася при  $\lambda \rightarrow \infty$  до однієї із границь інтегрування. Але, перейшовши до змінної  $\tau = t/t_0 - 1$ , інтеграл приймав стандартний вигляд з максимумом в точці  $\tau = 0$ . Якщо ж застосовувати метод Лапласа до інтеграла з "рухомою" точкою максимуму (тобто  $t_0 = t_0(\lambda)$ ), то це може привести до помилки. Проілюструємо сказане на простому прикладі.

$$I(\lambda) = \int_0^1 te^{-\lambda t} dt \sim \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

З іншого боку, максимум функції  $-\lambda t + \ln t$  досягається в точці  $t_0 = 1/\lambda$ . Розклавши цю функцію в ряд Тейлора в околі точки  $t_0$ , отримуємо

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda e} \int_0^1 e^{-\lambda^2(t-t_0)^2 + \dots} dt. \quad (5.44)$$

Якщо тепер в інтегралі (5.44) перейти до змінної  $\tau = t - t_0$  і формально проінтегрувати від  $-\infty$  до  $\infty$ , то ми отримуємо

$$I(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^2 e}, \quad \text{що невірно.}$$

Причина помилки полягає в тому, що область впливу точки  $\tau = 0$  є  $\Delta\tau \simeq 1/\lambda$  того ж порядку, що і величина відрізка  $[-t_0, 0]$ , тому і інтеграл  $\int_{-\infty}^{-t_0} e^{-\lambda^2\tau^2/2} d\tau$  того ж порядку, що і інтеграл  $\int_{-t_0}^0 e^{-\lambda^2\tau^2/2} d\tau$  (а не експоненційно малий, як повинно бути).

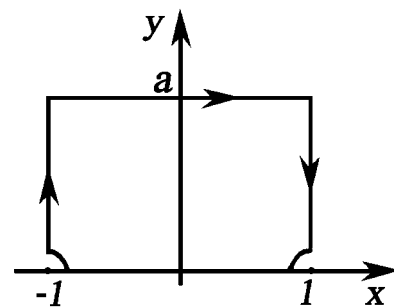
## Вихід в комплексну площину.

В деяких випадках інтеграли типу Фур'є можна звести до інтегралів Лапласа зміщуючи контур інтегрування в комплексну площину. Це дає нам можливість

знайти (в принципі) повний а.р. для інтегралів Фур'є (нагадаємо, що в більшості випадках метод стаціонарної фази дає лише кілька перших членів а.р.). Розглянемо деякі приклади.

**Приклад 20.** 
$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{itz}}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Функція  $e^{itz}$  стає експоненційно малою в верхній напівплощині комплексної змінної  $z$ . Тому, якщо ми деформуємо початковий контур (вздовж дійсної вісі) в область, де  $\Re z > 0$ , то на всьому контурі крім невеликого околу кінцевих точок  $\pm 1$ , підінтегральна функція буде експоненційно малою. Це означає, що з експоненційною точністю основний вклад в інтеграл вносять точки  $\pm 1$ , в околі яких ми можемо розкласти підінтегральну функцію  $f(z)$  в ряд і застосувати лему Ватсона. Розглянемо, наприклад, контур, що зображений на малюнку 9. На горизонтальному відрізку  $z = x + ia$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  і підінтегральна функція дорівнює



Мал. 9

$$\frac{e^{itz}}{\sqrt{1-z^2}} = e^{-at} \frac{e^{itx}}{\sqrt{1+a^2-2ix-x^2}} = \mathcal{O}(e^{-at}),$$

тобто є експоненційно малою. Розглянемо тепер інтеграл вздовж відрізка  $z = -1 + iy$ ,  $y \in [0, a]$  (позначимо його  $I_1$ ). Маємо<sup>14)</sup>

$$I_1 = \frac{ie^{-it}}{\pi} \int_0^a \frac{e^{-ty}}{\sqrt{y(2i+y)}} dy \quad (5.46)$$

Інтеграл (5.46) має вигляд інтеграла Лапласа, до якого застосовна лема Ватсона. Тут

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1/2, \quad f(y) = \frac{1}{\sqrt{2i+y}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(\frac{iy}{2}\right)^n.$$

Таким чином (з точністю до експоненційно малих доданків)

$$\begin{aligned} I_1 &\sim \frac{e^{-i(t-\pi/4)}}{\sqrt{2}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n} n!} e^{i\pi n/2} \int_0^{\infty} e^{-ty} y^{n-1/2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2}{2^{3n} n! t^n} e^{-i(t-\pi/4-\pi n/2)}. \end{aligned}$$

Інтеграл по другому відрізку, як неважко переконатися, є комплексно спряженим до  $I_1$ , тому

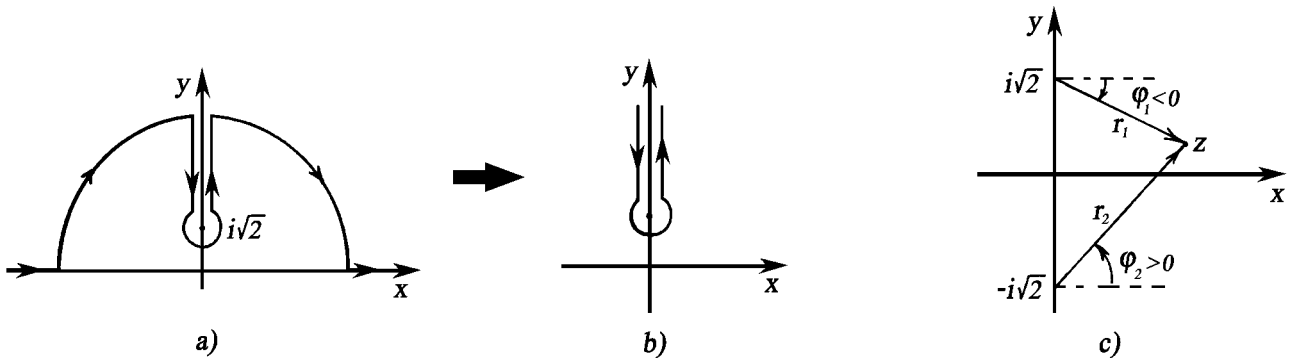
$$J_0(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2}{2^{3n} n! t^n} \cos(t - \pi/4 - \pi n/2).$$

<sup>14)</sup> Інтеграл по дугам кола радіуса  $r$  (навколо точок  $\pm 1$ ) прямує до нуля при  $r \rightarrow 0$ .

**Приклад 21.**

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\ln(2+x^2)} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.47)$$

Подивимось, спочатку, яку оцінку для  $I(\lambda)$  можна отримати, виходячи з методу стаціонарної фази. Оскільки  $S(x) = x$  не має стаціонарних точок, а функція  $f(x) = 1/\ln(2+x^2)$  нескінченно диференційовна на  $(-\infty, \infty)$  і  $f^{(n)}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то до інтеграла (5.47) застосовний метод інтегрування частинами, який дає  $I(\lambda) = o(\lambda^{-m}), \forall m$ , тобто інтеграл (5.47) експоненційно малий. Це все, що може дати метод стаціонарної фази. Для знаходження більш точної оцінки, деформуємо початковий контур інтегрування (вздовж дійсної вісі) в контур, що показано на малюнку 10а). Інтеграл по дузі великого кола, а також по відрізкам



Мал. 10

$[-R, -\infty) \cup [R, \infty)$  прямують до нуля при  $R \rightarrow \infty$ . Таким чином, в граничному випадку ( $R \rightarrow \infty$ ) контур інтегрування зводиться до того, що показано на малюнку 10b). Точка  $z = i\sqrt{2}$  є точкою розгалуження підінтегральної функції, тому інтеграли по лівому та правому берегам розрізу  $[i\sqrt{2}, i\infty)$  не компенсують один одного. Для проведення розрахунків по контуру 10b) виділимо у багатозначної функції  $\ln(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2})$  регулярну гілку слідуючим чином: будемо відраховувати аргументи комплексних чисел  $z - i\sqrt{2}$  та  $z + i\sqrt{2}$  так, як показано на малюнку 10c). Тоді на дійсній вісі  $\ln(z^2 + 2) = \ln(x^2 + 2)$  як і потрібно. На лівому березі розрізу

$$\arg(z - i\sqrt{2}) = e^{-i3\pi/2}, \quad \arg(z + i\sqrt{2}) = e^{i\pi/2} \Rightarrow \ln(z^2 + 1) = -i\pi + \ln(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}).$$

Аналогічно, на правому березі розрізу

$$\arg(z - i\sqrt{2}) = e^{i\pi/2}, \quad \arg(z + i\sqrt{2}) = e^{i\pi/2} \Rightarrow \ln(z^2 + 1) = i\pi + \ln(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}).$$

Інтеграл по малому колу (радіуса  $r$ ) пропорційний  $r/\ln r$  і прямує до нуля при  $r \rightarrow 0$ . Таким чином

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= - \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y} d(iy)}{-i\pi + \ln(y^2 - 2)} + \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y} d(iy)}{i\pi + \ln(y^2 - 2)} = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y} dy}{\pi^2 + \ln^2(y^2 - 2)} = \\ &= \left/ \begin{array}{l} \text{заміна} \\ \tau = y - \sqrt{2} \end{array} \right/ = 2\pi e^{-\sqrt{2}\lambda} \left[ \int_0^a \frac{e^{-\lambda\tau}}{\ln^2 \tau} (1 + \mathcal{O}(1/\ln \tau)) d\tau + \text{е.м.ч.} \right], \end{aligned}$$

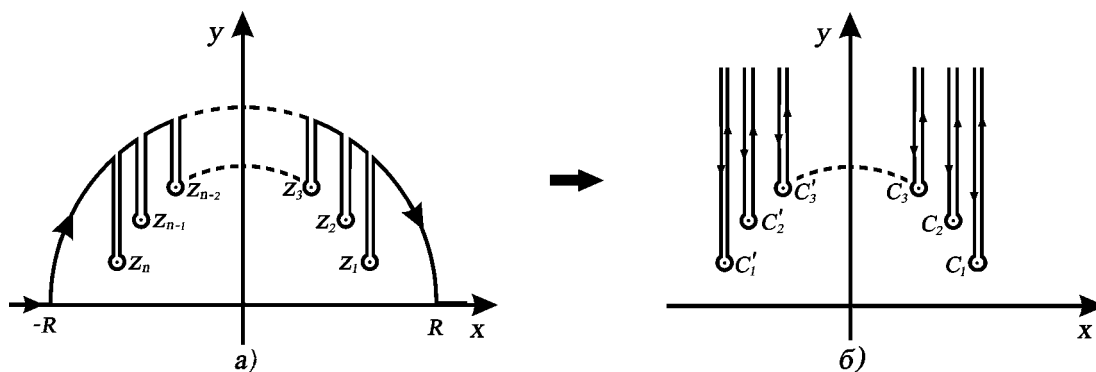
де  $0 < a < 1$  — довільна константа. Оцінку для інтеграла (5.48) ми вже знаходили в прикладі 12. Тому, використовуючи (5.8), отримуємо

$$I(\lambda) = \frac{2\pi e^{-\sqrt{2}\lambda}}{\lambda \ln^2 \lambda} (1 + \mathcal{O}(1/\ln \lambda)). \quad (5.48)$$

**Приклад 22.**

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{1+x^{2n}}} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

В верхній напівплощині комплексної змінної  $z$  функція  $\sqrt{1+z^{2n}}$  має  $n$  точок



Мал. 11

розгалуження:  $z_k = e^{i\pi/2n} \cdot e^{i\pi k/n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Тому при зміщенні контура інтегрування в область  $\Re z > 0$  ми повинні обходити ці особливі точки як показано на малюнку 11а). В граничному випадку при  $R \rightarrow \infty$  інтеграли по півколу радіуса  $R$  і відрізкам прямої  $[R, \infty)$  та  $(-\infty, -R]$  прямують до нуля і ми отримуємо сукупність контурів, що показана на малюнку 11б). Основний порядок малості кожного з інтегралів по контурам  $\mathcal{C}_k$  визначається значенням множника  $e^{i\lambda z}$  в околі точки  $z_k$ :

$$\left| \int_{\mathcal{C}_k} \right| = \mathcal{O}(|e^{i\lambda z_k}|) = \mathcal{O}(e^{-\lambda \Im z_k}). \quad (5.49)$$

З (5.49) випливає, що інтеграли по контурам  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}'_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}'_3$  і т.д. експоненційно малі в порівнянні з інтегралами по контурам  $\mathcal{C}_1$  та  $\mathcal{C}'_1$ . Таким чином при  $n \geq 2$

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}'_1} + \text{е.м.ч.} = 2\Re \left[ \int_{\mathcal{C}_1} \right] + \text{е.м.ч.} \quad (5.50)$$

Остання рівність в (5.50) випливає з того, що інтеграли по  $\mathcal{C}_1$  та  $\mathcal{C}'_1$  комплексно спряжені один до одного (це видно хоча б з того, що інтеграл  $I(\lambda)$  є величиною дійсною). Якщо ж  $n = 1$ , то вираз для  $I(\lambda)$  треба зменшити вдвічі, оскільки в цьому разі відсутня симетрична відносно вісі  $y$  друга особлива точка. В інтегралі по контуру  $\mathcal{C}_1$  достатньо розглянути лише правий беріг розрізу (який ми будемо позначати  $\mathcal{C}_1^+$ ), оскільки на лівому березі підінтегральна функція відрізняється

лише знаком. Тому (опускаючи експоненційно малі доданки) отримуємо<sup>15)</sup>

$$\begin{aligned}
 I(\lambda) &\sim 4\Re \left[ \int_{c_1^+} (\dots) dz \right] = \left/ \begin{array}{l} z = z_1 + iy \\ y \in [0, \infty) \end{array} \right/ = 4\Re \left[ \int_0^\infty \frac{e^{i\lambda z_1} \cdot e^{-\lambda y} d(iy)}{\sqrt{(z - z_1) \dots (z - z_{2n})}} \right] \sim \\
 &\sim 4\Re \left[ \frac{ie^{i\lambda z_1}}{\sqrt{(1 + z^{2n})'}} \int_{z=z_1}^\infty \frac{e^{-\lambda y} dy}{\sqrt{iy}} \right] = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\lambda}} e^{-\lambda \sin(\frac{\pi}{2n})} \cos \left[ \lambda \cos \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{4n}(n-1) \right].
 \end{aligned}$$

Приєм, який ми зараз розглянули, є частинним випадком більш загального методу, до якого ми і переходимо.

### 5.3 Метод перевала

В підрозділах 5.1 та 5.2 ми розглядали інтеграли виду

$$I(\lambda) = \int_C f(z) e^{\lambda S(z)} dz, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (5.51)$$

де інтегрування проводилось вздовж дійсної вісі, а функція  $S(z)$  була або чисто дійсною (інтеграли Лапласа), або чисто уявною (інтеграли Фур'є). Метод перевала дозволяє зняти ці обмеження і розглядати інтеграли по контуру  $\mathcal{C}$  в комплексній площині від довільних комплекснозначних функцій  $f(z)$  та  $S(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ .

**Евристичні міркування.** Нехай контур  $\mathcal{C}$  має скінченну довжину, а функції  $f(z)$  та  $S(z)$  обмежені на  $\mathcal{C}$ . Тоді ми можемо грубо оцінити інтеграл (5.51), записавши

$$|I(\lambda)| \leq \int_C |f(z)| e^{\lambda \varphi} |dz| = \mathcal{O}(e^{\lambda \varphi_0}),$$

де  $\varphi_0 = \sup(\varphi(x, y))_C$  — максимальне значення дійсної частини функції  $S(z)$  на контурі  $\mathcal{C}$ . Спробуємо покращити цю оцінку. Для цього скористаємося тим, що інтеграл (5.51) не зміниться, якщо ми, зафіксувавши кінці контура  $\mathcal{C}$ , будемо зміщувати його в комплексній площині так, щоб при цьому не перетинати особливих точок підінтегральної функції<sup>16)</sup>. Можливо, що на новому контурі  $\mathcal{C}'$  значення  $\varphi'_0 = \sup(\varphi(x, y))_{\mathcal{C}'}$  буде меншим, ніж  $\varphi_0$ . Таким чином, ми можемо покращити попередню оцінку.

Постараємось знайти такий контур  $\mathcal{C}^*$ , на якому величина  $\varphi_0$  досягає найменшого можливого значення  $\varphi_0^*$  в порівнянні із значеннями  $\varphi_0$  на інших, нескінченно близьких до нього контурах. Якщо такий контур існує, будемо називати його мінімаксом, а точки  $z_0$ , в яких  $\varphi = \varphi_0^*$  — точками мінімакса. Точніше кажучи, мінімаксом будемо називати контур, на якому значення  $\varphi_0^*$  досягаються

<sup>15)</sup> Інтеграл по малому колу радіуса  $r$  (навколо точки  $z_1$ ) пропорційний  $\sqrt{r}$  і прямує до нуля при  $r \rightarrow 0$ .

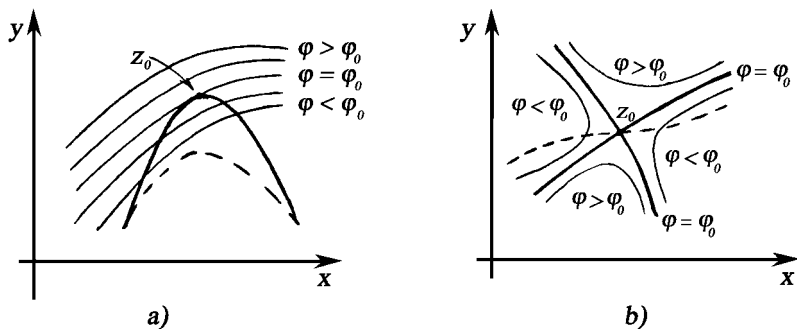
<sup>16)</sup> Якщо особливими точками є полюси, то ми можемо перетинати їх, але при цьому необхідно додавати до значення інтеграла відповідні лишки.



в мінімально можливому числі точок (точок мінімакса). Це означає, що малою деформацією контура ми не зможемо зменшити їх числа.

**Твердження.** Якщо мінімаксий контур існує, то точками мінімакса можуть бути або кінці контура (позначимо ці точки  $A$  та  $B$ ), або точки перевала, тобто точки де  $S'(z) = 0$ <sup>17</sup>.

**Доведення.** Очевидно, що  $\varphi_0 \geq (\varphi_A, \varphi_B)$ , тобто максимальне значення  $\varphi$  на  $\mathcal{C}$  не може бути меншим, ніж значення  $\varphi$  на кінцях контура. Тому і мінімаксий значення  $\varphi_0^*$  буде задовольняти цієї ж нерівності. Таким чином, якщо існує контур, на якому  $\varphi$  досягає максимума на одному із його кінців (або на обох), то цей контур буде мінімаксий, а його кінець — точкою мінімакса.



Мал. 12: лінії рівня  $\varphi = \text{const}$  в околі точки  $z_0$  у випадку а)  $S'(z_0) \neq 0$  та б)  $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$ . Пунктирна лінія на малюнку 12b) — мінімаксий контур.

Нехай тепер такого контура (з максимумом  $\varphi$  на кінці) не існує. В цьому разі точка мінімакса  $z_0$  може бути лише внутрішньою точкою контура. Нехай, наприклад, в цій точці  $S'(z_0) \neq 0$ . З умов Коші – Рімана випливає, що в точці  $z_0$  існує ненульовий вектор  $\nabla\varphi$

$$\frac{dS}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y) \neq \mathbf{0}.$$

Це означає, що в напрямку  $\vec{n} = -\nabla\varphi$  значення  $\varphi$  зменшується. Тому, зміщуючи контур в цьому напрямку ми отримуємо новий контур (пунктирна лінія на малюнку 12a), на якому максимальне значення  $\varphi$  буде меншим, ніж  $\varphi_0^*$ , що суперечить умові мінімаксийності. Якщо ж  $S'(z) = 0$  то, як видно з малюнку 12b), зменшити значення  $\varphi_0^*$  малою деформацією контура вже не вдасться, оскільки в будь-якому околі точки  $z_0$  існує область з  $\varphi > \varphi_0^*$ .

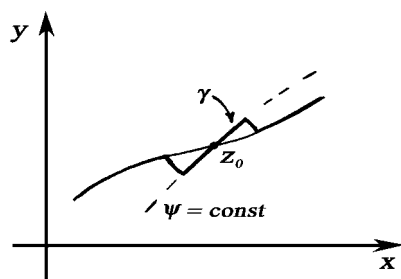
З приведенного вище *твердження* випливає такий наслідок.

**Наслідок (критерій мінімаксийності).** Якщо існує контур  $\mathcal{C}$ , на якому максимум  $\varphi$  досягається лише або на кінцях контура, або в точках перевала, то цей контур мінімаксий.

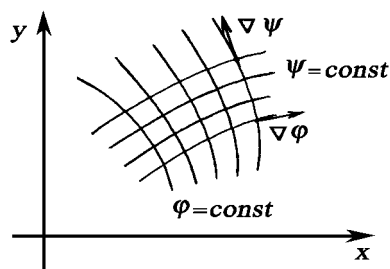
<sup>17</sup>) Назва — точка перевала, обумовлена тим, що в околі цієї точки поверхня  $\Re S(z) = \varphi(x, y)$  має вигляд гіперболічного параболоїда (поверхня перевала або сідлова поверхня). Дійсно, в околі точки  $z_0: S(z) \approx S_0 + a(z-z_0)^2$ . Взнявши дійсну частину від функції  $a(z-z_0)^2$  отримуємо поверхню, канонічний вигляд якої  $\varphi = x^2 - y^2$ .

**Метод перевала.** Застосування метода перевала розпадається на два етапи: 1) знаходження мінімаксного контура, та 2) розрахунок а.р. по відомим точкам мінімакса<sup>18)</sup>. Перший з цих етапів є найбільш складним і неочевидним, оскільки не існує загальних рецептів, які б дозволяли по відомим функціям  $f(z)$  та  $S(z)$  знаходити мінімаксний контур. Цей етап — етап міркувань та припущень: пробуються різні контури і перевіряється, чи виконуються умови *наслідку*. Якщо мінімаксний контур знайдений, переходимо до другого етапу, який є суто технічний і стандартний.

**Метод розрахунку а.р.** Розіб'ємо мінімаксний контур на частини так, щоб кожний із участків включав лише одну точку мінімакса (якщо їх кілька). Нехай, наприклад, точка мінімакса є внутрішньою точкою інтервала, тобто точкою перевала  $z_0$ . В околі точки  $z_0$  деформуємо мінімаксний контур так, щоб вздовж маленького участка  $\gamma$  уявна частина функції  $S(z)$  була постійною, тобто  $\psi(x, y) =$



Мал.13



Мал.14

$\psi = \text{const}$ ,  $z \in \gamma$  (малюнок 13). Це відповідає тому, що ми здіймаємось на перевал та спускаємось з нього по шляху найшвидшої зміни  $\varphi(x, y)$ .

Дійсно, з умов Коші – Рімана випливає, що в будь-якій точці  $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0$ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \equiv 0.$$

Векторне поле  $\nabla\psi$  ортогональне до ліній  $\psi = \text{const}$ , а оскільки  $\nabla\varphi \perp \nabla\psi$ , то поле  $\nabla\varphi$  скрізь дотичне до ліній  $\psi = \text{const}$  (малюнок 14). З іншого боку, вектор  $\nabla\varphi$  вказує напрямок найшвидшої зміни  $\varphi$ . Лінії  $\psi = \text{const}$  називаються лініями стоку. Вздовж цих ліній поверхня  $\varphi = \varphi(x, y)$  має найбільшу крутизну.

При цьому новий контур  $\tilde{C}^*$  залишається мінімаксним, якщо довжина участка  $\gamma$  достатньо мала. Позначимо  $C'$  — контур  $\tilde{C}^*$  без участка  $\gamma$ . Оскільки  $\varphi$  досягає максимуму лише в точці  $z_0$ , то на  $C'$  буде виконуватись нерівність:  $\varphi(x, y) \leq \varphi_0 - \delta$ , де  $\delta > 0$ . Тому

$$\int_{C'} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = \mathcal{O}(e^{\lambda\varphi_0} \cdot e^{-\lambda\delta}).$$

<sup>18)</sup> Сам мінімаксний контур нам не потрібен. Достатньо лише знати точки мінімакса. При цьому, як і в методі Лапласа, асимптотичний ряд для  $I(\lambda)$  визначається поведінкою функцій  $f(z)$  та  $S(z)$  в малому околі точок мінімакса. Звернемо також увагу на те, що в інтегралах Лапласа контур інтегрування (вздовж дійсної вісі) завжди є мінімаксним, а точки, де  $S'(x) = 0$  (для метода стаціонарної фази) або  $S(x) = \max$  (для метода Лапласа) є точками мінімакса. Кінці контура в інтегралах Фур'є також будуть точками мінімакса.

На участку  $\gamma$  інтеграл (5.51) має вигляд інтеграла Лапласа

$$\int_{\gamma} = e^{i\lambda\psi_0} \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda\varphi} dz = e^{i\lambda\psi_0} \int_{-t_1}^{t_2} f(z(t)) e^{\lambda\varphi(t)} (x'(t) + iy'(t)) dt = \mathcal{O} \left( e^{\lambda\varphi_0} / \sqrt{\lambda} \right),$$

де  $z(t) = x(t) + iy(t)$  — параметричне рівняння кривої  $\gamma$ ,  $z(0) = z_0$ . Таким чином

$$I(\lambda) = \int_{c'} + \int_{\gamma} = e^{\lambda S_0} \left( \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda(S-S_0)} dz + \text{е.м.ч.} \right), \quad (5.52)$$

де  $S_0 = S(z_0)$ . З (5.52) випливає, що з експоненційною точністю а.р. для  $I(\lambda)$  співпадає з а.р. для  $\int_{\gamma}$ , який знаходиться за допомогою метода Лапласа.

Цілком аналогічно розглядається випадок, коли точка мінімакса  $z_0$  співпадає з одним із кінців контура. Знову таки, деформуємо мінімаксий контур так, щоб вздовж маленького участка  $\gamma$  уявна частина функції  $S(z)$  була постійною. При цьому рівність (5.52) залишається вірною, де тепер інтеграл  $\int_{\gamma}$  має вигляд інтеграла Лапласа з максимумом на кінці.

Вище ми вважали, що на участку  $\gamma$   $\Im m S(z) = \text{const}$ . Це було нам необхідно для того, щоб на  $\gamma$  інтеграл (5.51) зводився до інтеграла Лапласа. Проте, для цього зовсім не обов'язково інтегрувати саме по кривій  $\gamma$ . Достатньо взяти участок *прямої*, яка проходить через точку  $z_0$  і є дотичною до  $\gamma$ . Дійсно, нехай, наприклад, в точці  $z_0$   $S''(z_0) \neq 0$ . Тоді

$$S(z) = S_0 + \frac{1}{2} S_0'' (z - z_0)^2 + \frac{1}{6} S_0''' (z - z_0)^3 + \dots = S_0 + a e^{i\theta} (z - z_0)^2 + \dots$$

де ми поклали  $a = |S_0''/2|$ ,  $\theta = \arg(S_0'')$ . Візьмемо в якості шляху інтегрування пряму  $\ell$ , що проходить через точку  $z_0$  і складає кут  $\varphi$  з віссю  $x$ . На цій прямій  $z = z_0 + t e^{i\varphi}$  і тому

$$S(z) = S_0 + a e^{i(\theta+2\varphi)} t^2 + \frac{1}{6} S_0''' e^{3i\varphi} t^3 + \dots$$

Виберемо значення  $\varphi$  таким, щоб  $e^{i(\theta+2\varphi)} = -1$ , тобто покладемо  $\varphi = \pi/2 - \theta/2$ <sup>19)</sup>. Тоді

$$S(z) = S_0 - a t^2 + \alpha t^3 + \beta t^4 + \dots$$

де коефіцієнт  $a > 0$  — дійсний, а всі інші коефіцієнти  $\alpha, \beta, \dots$ , взагалі то кажучи, комплексні. Далі йдуть викладки, аналогічні тим, що проводяться в методі Лапласа. А саме:

$$e^{\lambda(S(t)-S_0)} = e^{-\lambda a t^2} e^{\lambda(\alpha t^3 + \beta t^4 + \dots)} = e^{-\lambda a t^2} (1 + \alpha \lambda t^3 + \beta \lambda t^4 + \dots)$$

і інтеграл по участку прямої  $\ell$  приймає вигляд інтеграла Лапласа.

<sup>19)</sup> Перевірте, що при такому виборі кута  $\varphi$  пряма  $\ell$  є дотичною до кривої  $\gamma$ .

**Приклад 23.**

$$I_n = \int_{-1}^{\infty} (x^3 + 3x - 2i)^{-n} e^{ix} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.53)$$

В цьому випадку  $f(z) = e^{iz}$ ,  $S(z) = -\ln(z^3 + 3z - 2i)$ . Функція  $S(z)$  має лише одну точку перевала  $z_0 = -i$ :

$$S'(z) = -\frac{3(z^2 + 1)}{(z - i)^2(z + 2i)} = -\frac{3(z + i)}{(z - i)(z + 2i)} = 0 \Rightarrow z_0 = -i.$$

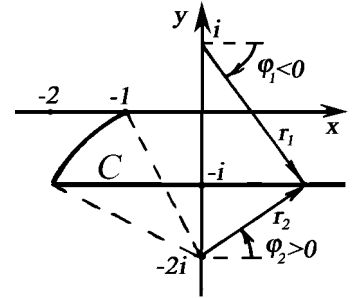
Тому розглянемо в якості можливого контура інтегрування контур  $\mathcal{C}$ , що зображений на малюнку 15. Нам потрібно дослідити поведінку функції  $\Re S(z)$  в точках на  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} S(z) &= -\ln(z - i)^2(z + 2i) = -\ln(r_1^2 r_2 e^{i(\varphi_2 - 2\varphi_1)}) = -\ln(r_1^2 r_2) + i(2\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Re S(z) &= -\ln(r_1^2 r_2). \end{aligned} \quad (5.54)$$

На прямій  $z = -i + x$  величини  $r_1(z)$  та  $r_2(z)$  досягають мінімуму в точці  $z = -i$  і монотонно зростають при віддаленні від неї. Таким чином, на цій прямій  $\Re S(z)$  досягає максимуму в точці перевала  $z_0 = -i$ .

На другому участку контура (дуга кола радіуса  $\sqrt{5}$ ):

$$r_2 = \sqrt{5} = \text{const} \Rightarrow \Re S(z) = -2 \ln r_1 + \text{const}.$$



Мал. 15

Оскільки значення  $r_1(z)$  монотонно зростає при віддаленні від точки  $z = -1$ , то на дузі кола максимум  $\Re S(z)$  досягається в точці  $z = -1$ . Залишається порівняти величини  $\Re S(-1)$  та  $\Re S(-i)$ :

$$\Re S(-1) = -\ln 2\sqrt{5} < \Re S(-i) = -\ln 4.$$

Таким чином, на всьому контурі  $\Re S(z)$  досягає максимуму в точці перевала  $z_0 = -i$ . Це означає, що контур  $\mathcal{C}$  — мінімаксний з однією точкою мінімакса  $z = z_0^{20}$ . В околі точки  $z_0$

$$S(z) = -\ln 4 + i\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}(z + i)^2 + \dots \quad (5.55)$$

Розглянемо пряму  $\ell$ , що проходить через точку  $z_0$  під кутом  $\varphi$  з віссю  $x$  ( $t$  — параметр)

$$\ell: \quad z = -i + te^{i\varphi}, \quad \varphi = \text{const}; \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Підставляючи це значення  $z$  в (5.55) ми знаходимо, що при  $\varphi = 0$  (або  $\varphi = \pi$ , що теж саме)  $S(t) = S_0 - 3t^2/4 + \dots$ , тобто з точністю до нескінченно малих вищого

<sup>20)</sup> Якщо б було  $\Re S(-1) > \Re S(-i)$ , то точкою мінімакса був би кінець контура  $z = -1$ , а в разі  $\Re S(-1) = \Re S(-i)$  ми б мали дві точки мінімакса. В цьому випадку повний а.р. був би сумою вкладів від точок  $z = -1$  та  $z = -i$ .

порядку  $\Im m S(z) = i\pi/2 = \text{const}$  і інтеграл по  $\ell$  в околі точки  $z_0$  приймає вигляд інтеграла Лапласа. В околі  $z_0$ :

$$f(z) = e^{i(t-i)} = e(1 + it - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3));$$

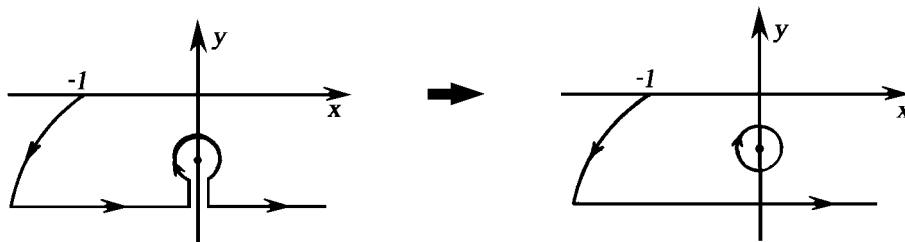
$$e^{n(S-S_0)} = e^{n(-3t^2/4 - it^3/4 + 9t^4/32 + \mathcal{O}(t^5))} = e^{-3nt^2/4} \left( 1 - \frac{int^3}{4} + \frac{9nt^4}{32} - \frac{n^2t^6}{32} + \mathcal{O}(nt^5) \right).$$

$$I_n = e^{nS_0} \left( \int_{\ell} f(z) e^{n(S-S_0)} dz + \text{е.м.ч.} \right) = e \left( \frac{i}{4} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3nt^2/4} \left( 1 + it - \frac{t^2}{2} - \frac{int^3}{4} + \frac{17nt^4}{32} - \frac{n^2t^6}{32} + \mathcal{O}(t^3) \right) dt = 2e \left( \frac{i}{4} \right)^n \sqrt{\frac{\pi}{3n}} \left( 1 + \frac{17}{72n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}) \right).$$

При розрахунках ми приймали до уваги, що доданки, пропорційні  $t^2$ ,  $nt^4$  та  $n^2t^6$  вносять в інтеграл однаковий вклад  $\simeq n^{-3/2}$ . Теж саме стосується і доданків з символом  $\mathcal{O}$ .

**Приклад 24.** 
$$J_n = \int_{-1}^{\infty} \frac{(x^3 + 3x - 2i)^{-n}}{1 + 4x^2} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Цей приклад відрізняється від попереднього наявністю полюсів  $z = \pm i/2$ , один з яких ( $z = -i/2$ ) лежить між початковим контуром (дійсна вісь) та точкою перевала  $z = -i$ . При переході до мінімаксного контуру ми повинні перетнути



Мал. 16

полюс  $z = -i/2$ , що можна врахувати додаванням відповідного лишку (малюнок 16). Таким чином

$$J_n = I_n - 2\pi i \operatorname{res} \left( \frac{(z^3 + 3z - 2i)^{-n}}{1 + 4z^2} \right)_{z=-i/2} = 2 \left( \frac{i}{4} \right)^n \sqrt{\frac{\pi}{3n}} (1 + \mathcal{O}(1/n)) + \frac{\pi i^n}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{3n},$$

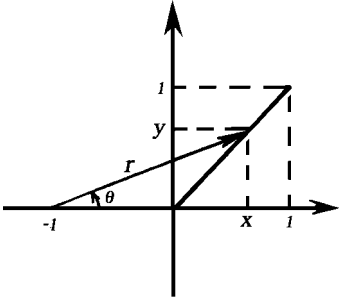
де величина  $I_n$  обумовлена вкладом в інтеграл точки перевала  $z = -i$  і відрізняється від  $I_n$  з попереднього приклада відсутністю множника  $e$  (в головному порядку). Але, оскільки  $(2/3)^3 > 1/4$ , то інтеграл  $I_n$  експоненційно малий в порівнянні з лишком, так що

$$J_n = \frac{\pi i^n}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{3n} (1 + \text{е.м.ч.}).$$

**Приклад 25.**

$$I(\lambda) = \int_0^{1+i} (1+z)^{i\lambda} e^{i\lambda e^z} dz, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.56)$$

Інтегрування проводиться вздовж відрізка прямої, що з'єднує точки 0 та  $1+i$ . Інтеграл (5.56) має вигляд (5.51), де  $f(z) = 1$ ,  $S(z) = i(e^z + \ln(1+z))$ . Дослідимо поведінку  $\Re S(z)$  в точках на контурі (малюнок 17)



Мал. 17

$$\Re S(z) = \Re [i(e^{x+iy} + \ln r e^{i\theta})] = -e^x \sin y - \theta. \quad (5.57)$$

Як видно з (5.57)  $\Re S(z)$  досягає максимуму в точці  $z = 0$ . Таким чином, початковий контур є мінімаксом, з точкою мінімакса  $z = 0$  (кінець контура). В околі цієї точки

$$S(z) = i + 2iz + \frac{iz^3}{2} + \mathcal{O}(z^4).$$

Деформуємо початковий контур інтегрування в околі нуля так, щоб функція  $S(z)$ , з точністю до нескінченно малих вищого порядку, приймала вигляд фазової функції інтеграла Лапласа. В точках на прямій  $z = te^{i\varphi}$  ( $t$  — параметр,  $\varphi = \text{const}$ )  $S(z)$  приймає вигляд

$$S(t) = i + 2te^{i(\varphi+\pi/2)} + \frac{t^3}{2}e^{i(3\varphi+\pi/2)} + \mathcal{O}(t^4).$$

Для того, щоб коефіцієнт при  $t$  був дійсним і від'ємним треба покласти  $\varphi = \pi/2$ . При цьому

$$z = it, \quad S = i - 2t + \frac{t^3}{2} + \mathcal{O}(t^4); \quad e^{\lambda S} = e^{i\lambda} e^{-2\lambda t} (1 + \lambda t^3/2 + \mathcal{O}(\lambda t^4))$$

$$I(\lambda) = e^{i\lambda} \int_0^\infty e^{-2\lambda t} (1 + \lambda t^3/2 + \mathcal{O}(\lambda t^4)) d(it) = ie^{i\lambda} \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{16\lambda^3} + \mathcal{O}(\lambda^{-4}) \right).$$

В деяких випадках метод перевала може бути корисним для знаходження асимптотичної поведінки коефіцієнтів розкладу функції  $f(z)$  в ряд Маклорена ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (5.58)$$

Інтегрування в (5.58) проводиться по замкнутому контуру, що охоплює точку  $z = 0$  і не включає особливих точок функції  $f(z)$ . Інтеграл (5.58) має вигляд (5.51) з  $S(z) = -\ln z$ . Але,  $\Re S(z)$  приймає найменше значення в нескінченності, тому для функції  $S(z)$  мінімаксового контуру не існує. До цього ж висновку можна прийти і іншим шляхом (ці міркування знадобляться пізніше): оскільки контур  $\mathcal{C}$  замкнутий, то точками мінімакса можуть бути лише точки перевала, які відсутні для функції  $S(z) = -\ln z$ . В цих випадках можна спробувати застосувати прийом, аналогічний тому, який ми розглянули в прикладах 18,19 для метода Лапласа.

**Приклад 26.** Знайдемо асимптотику коефіцієнтів розкладу в ряд Маклорена функції

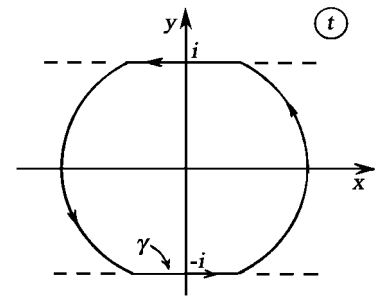
$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+z^2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2-n \ln z}}{z(z^2+1)} dz, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.59)$$

Розглянемо функцію  $\tilde{S}(z) = -z^2 - n \ln z$ . Точками перевала для неї є  $z = \pm i\sqrt{n/2}$ . Перейшовши в (5.59) до нової змінної  $t = z\sqrt{2/n}$ , отримаємо

$$a_n = \frac{1}{i\pi n} \left(\frac{2}{n}\right)^{n/2} \oint \frac{e^{-n(t^2/2 + \ln t)}}{t(t^2 + 2/n)} dt. \quad (5.60)$$

Якщо для інтеграла (5.60) мінімаксний контур існує, то він повинен проходити через точки перевала  $t = \pm i$ . Тому, розглянемо в якості контура інтегрування коло радіуса 1. Те, що цей контур включає в себе крім точки  $t = 0$  ще і два додаткових полюса  $t_{1,2} = \pm i\sqrt{2/n}$  — не страшно, оскільки їх внесок в інтеграл (сума лишків) легко знаходиться. В точках кола

$$\frac{1}{t^2 + 2/n} = \frac{1}{t^2} (1 + \mathcal{O}(1/n))$$



Мал. 18

і інтеграл (5.60) приймає вигляд, аналогічний (5.51)

$$I_n = \frac{1}{i\pi n} \left(\frac{2}{n}\right)^{n/2} (1 + \mathcal{O}(1/n)) \oint \frac{e^{-n(t^2/2 + \ln t)}}{t^3} dt \quad (5.61)$$

(ми пишемо  $I_n$  замість  $a_n$  оскільки інтеграл (5.61) відрізняється від коефіцієнта  $a_n$  на суму лишків). Залишається перевірити, чи є контур  $|t| = 1$  мінімаксним. Для цього необхідно, щоб максимум дійсної частини функції  $S(z) = -t^2/2 - \ln t$  досягався лише в точках перевала  $\pm i$

$$t = e^{i\varphi}, \quad \Re S(t) = -\frac{\cos 2\varphi}{2} = \max \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \text{тобто } t = \pm i.$$

Таким чином, наш контур є мінімаксним з двома точками мінімакса  $t = \pm i$ . В околі точки  $t = -i$ :

$$S(t) = 1/2 + i\pi/2 - (t+i)^2 + \dots, \quad 1/t^3 = -i + \mathcal{O}(|t+i|).$$

На участку інтегрування  $\gamma$ :  $t = -i + x$  (дивись малюнок 18), і тому вклад в інтеграл (5.61) точки  $t = -i$  (позначимо його  $I_n^{(1)}$ ) дорівнює

$$I_n^{(1)} = -\frac{e^{i\pi n/2}}{\pi n} \left(\frac{2e}{n}\right)^{n/2} (1 + \mathcal{O}(1/n)) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} dx = -\frac{e^{i\pi n/2}}{\sqrt{\pi n} n} \left(\frac{2e}{n}\right)^{n/2} (1 + \mathcal{O}(1/n)).$$

В околі точки  $z = i$ :

$$S(t) = 1/2 - i\pi/2 - (t-i)^2 + \dots, \quad 1/t^3 = i + \mathcal{O}(|t-i|)$$

і тому вклад її в інтеграл (5.61) комплексно спряжений до  $I_n^{(1)}$  (тут треба ще врахувати, що інтегрування проводиться в напрямку, протилежному вісі  $x$ ). Таким чином

$$I_n = 2\Re I_n^{(1)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi n} n} \left(\frac{2e}{n}\right)^{n/2} (1 + \mathcal{O}(1/n)) \cos(\pi n/2).^{21)} \quad (5.62)$$

Величина  $a_n$  відрізняється від  $I_n$  на суму лишків

$$\sum_{z=\pm i} \operatorname{res} \left( \frac{e^{-z^2}}{z^{n+1}(z^2+1)} \right) = -e \cos(\pi n/2). \quad (5.63)$$

Звичайно, що коли  $n$  — непарне,  $a_n \equiv 0$  (це є наслідком парності функції  $f(z)$ ). Для парних номерів  $n$  рівності (5.62) та (5.63) дають

$$I_n = a_n + \sum \operatorname{res}(\dots) \Rightarrow a_{2n} = (-1)^n \left[ e - \frac{1}{(n+1)!} (1 + \mathcal{O}(1/n)) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Повернемося знову до питання про вибір контура інтегрування. Чому ми вибираємо саме мінімаксий контур? Чому б не взяти початковий контур і знайти на ньому точку, в якій досягає максимума модуль підінтегральної функції? Тоді в околі цієї точки дійсна частина підінтегральної функції приймає вигляд інтеграла Лапласа і ми, здавалось би, можемо застосувати стандартний метод розрахунку а.р.

Розглянемо в якості приклада інтеграл

$$J_n = \int_{-1}^{\infty} (x^3 + 3x - 2i)^{-n} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.64)$$

На дійсній вісі модуль функції  $S(x) = -\ln(x^3 + 3x - 2i)$  досягає максимума в точці  $x = 0$ . В околі цієї точки

$$S(x) = \frac{i\pi}{2} - \ln 2 - \frac{3ix}{2} - \frac{9x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{і тому}$$

$$J_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int_{-1}^{\infty} e^{-9nx^2/8 - 3inx/2 + \mathcal{O}(nx^3)} dx. \quad (5.65)$$

Дійсна частина (5.65) має вигляд інтеграла Лапласа. Але, неважко бачити, що доданок  $-9nx^2/8$  не є домінуючим. Область впливу цього доданку  $\Delta x \simeq 1/\sqrt{n}$ . На проміжку  $\Delta x \simeq (-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n})$  підінтегральна функція швидко осцилює з періодом  $\simeq 1/n \ll 1/\sqrt{n}$  (за рахунок другого, лінійного по  $x$  доданку). Це приводить до того, що значення інтеграла (5.65) буде експоненційно малим (а не степеневі)

<sup>21)</sup> Формально в (5.62) потрібно було б записати  $\cos(\pi n/2) + \mathcal{O}(1/n)$  замість  $(1 + \mathcal{O}(1/n)) \cos(\pi n/2)$ . Але, враховуючи парність функції  $f(z)$ , ми бачимо, що при непарних  $n$   $I_n \equiv 0$ . Це і відображено в (5.62).

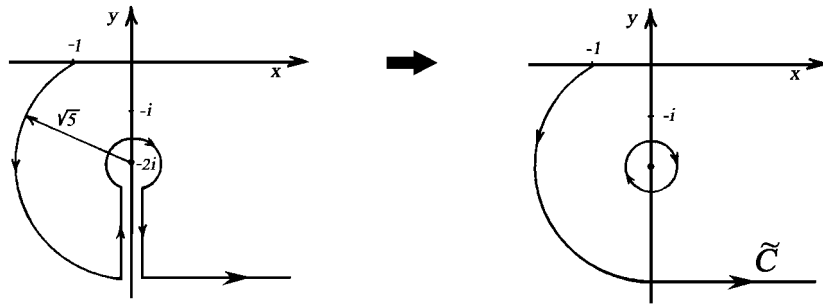


малості  $\simeq 1/\sqrt{n}$ , як було б в разі домінування доданку  $-9nx^2/8$ ). Наприклад, якщо обмежитись першими двома доданками в експоненті, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-9nx^2/8-3inx/2} dx = \sqrt{\frac{8\pi}{9n}} e^{-n/2}.$$

Таким чином, метод Лапласа для інтеграла (5.65) не застосовний. Вираз (5.65) дозволяє лише стверджувати, що  $|J_n| = o(2^{-n})$ , що є дуже грубою оцінкою.

В усіх прикладах, які ми розглянули (або будемо розглядати) мінімаксий контур дається без пояснень, чому обирається саме цей контур, а не інший. Це пов'язано з тим, що вибір контура — справа неоднозначна: існує нескінченно багато мінімаксий контурів, які придатні до розрахунку, і вибір одного з них є справою смаку і досвіду. Досвід необхідний тоді, коли задача допускає кілька *не еквівалентних* мінімаксий контурів, тобто контурів, що проходять через різні



Мал. 19

точки мінімакса. Правильний вибір контура може значно спростити розрахунки. Розглянемо в якості приклада інтеграл (5.64). Один із можливих мінімаксий контурів для нього зображений на малюнку 15. Інший, *не еквівалентний* контур показано на малюнку 19. Те, що цей контур є мінімаксий легко перекопати, скориставшись виразом (5.54): на  $\tilde{C}$  величина  $-\Re \ln(z^3 + 3z - 2i)$  монотонно спадає при віддаленні від точки  $z = -1$ , яка є єдиною точкою мінімакса. Таким чином, для інтеграла (5.64) маємо

$$J_n = \int_{\tilde{C}} (\dots) dz - 2\pi i \operatorname{res} \left( (z-i)^{-2n} (z+i)^{-n} \right)_{z=-2i}.$$

Інтеграл по  $\tilde{C}$  порядку  $\mathcal{O}((2\sqrt{5})^{-n}/n)$  і є експоненційно малим в порівнянні з  $J_n$ . Тому

$$J_n = -2\pi i \operatorname{res} \left( (z-i)^{-2n} (z+i)^{-n} \right)_{z=-2i} + \text{e.m.ч.} = \frac{4\pi n}{3n-1} \left( \frac{i}{27} \right)^n \frac{(3n)!}{n!(2n)!} + \text{e.m.ч.} \quad (5.66)$$

Формула (5.66) дозволяє знайти повний а.р. для  $J_n$ . Так, наприклад, використовуючи для  $n!$  вираз (5.43) отримуємо

$$J_n = \left( \frac{i}{4} \right)^n \sqrt{\frac{4\pi}{3n}} \left( 1 + \frac{17}{72n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}) \right).$$

Звичайно, що контур  $\tilde{\mathcal{C}}$  придатний і для інтеграла (5.53) з приклада 23. Але в цьому разі такий вибір контура не спрощує, а навпаки — ускладнює розрахунки, оскільки тепер лишок вже не має такого простого вигляду, як в (5.66):

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathcal{C}} (\dots) dz - 2\pi i \operatorname{res} \left( \frac{e^{iz}}{(z-i)^{2n}(z+2i)^n} \right)_{z=-2i} = -\frac{2\pi i}{(n-1)!} \left( \frac{e^{iz}}{(z-i)^{2n}} \right)_{z=-2i}^{(n-1)} + \text{е.м.ч.} \\ &= \frac{2\pi e^2}{(9i)^n (2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (2n+k-1)!}{3^k k! (n-k-1)!} + \text{е.м.ч.} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Задача знаходження асимптотики суми (5.67) набагато складніша, ніж початкова. Краще відразу шукати асимптотику лишку. Для цього запишемо його у вигляді контурного інтеграла:

$$2\pi i \operatorname{res} \left( \frac{e^{iz}}{(z-i)^{2n}(z+2i)^n} \right)_{z=-2i} = \oint_{\mathcal{C}^+} \frac{e^{iz}}{(z-i)^{2n}(z+2i)^n} dz, \quad (5.68)$$

де  $\mathcal{C}^+$  — замкнутий контур, що обходиться у додатному напрямку і охоплює точку  $z = -2i$ , не включаючи точки  $z = i$ . В якості такого контура можна взяти коло радіуса  $R < 3$ . Записавши інтеграл (5.68) у вигляді (5.51) знаходимо, що в цьому разі фазова функція  $S(z) = -\ln(z-i)^2(z+2i)$  і має лише одну точку перевала  $z = -i$ . Тому, в якості можливого мінімаксного контура візьмемо коло радіуса 1 з центром в точці  $z = -2i$ . Пропонуємо читачу довести, що цей контур є мінімаксним, з точкою мінімакса  $z = -i$  (точка перевала). Далі йдуть викладки повністю тотожні тим, що проводились в прикладі 23.

## Інтеграл Фур'є та метод перевала.

Розглянемо інтеграл Фур'є

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \quad (5.69)$$

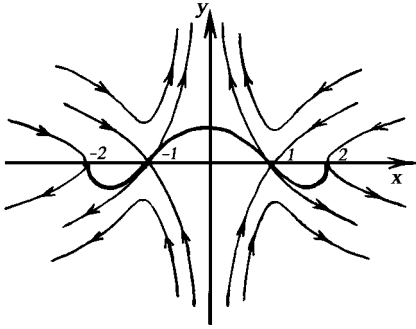
з точки зору метода перевала. На інтервалі  $(a, b)$  дійсна частина функції  $iS(x)$  дорівнює нулю. Таким чином, в усіх точках контура  $\Re iS(x)$  приймає однако-ве значення. Формально ми можемо сказати, що  $\Re iS(x)$  досягає максимуму на кінцях інтервала і тому контур інтегрування є мінімаксним. Але, для проведення розрахунків нам необхідно деформувати контур так, щоб величина  $\Re iS(x)$  досягала максимуму в як можливо меншому числі точок. Цими точками можуть бути лише кінці контура та точки перевала (стаціонарні точки), якщо вони є на інтервалі  $(a, b)$ . В околі кожної з точок мінімакса інтеграл (5.69) зводиться до інтеграла Лапласа відповідного вигляду (з максимумом  $S(x)$  на кінці або в середині інтервала). Повний а.р. є сумою вкладів від кожної з точок мінімакса. Таким чином, у випадку, коли інтервал  $(a, b)$  скінченний, а функція  $S(x)$  обмежена на  $[a, b]$  складнощів з знаходженням а.р. не виникає.

**Приклад 27.** 
$$I(\lambda) = \int_{-2}^2 e^{i\lambda(3x-x^3)} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.70)$$

На відрізку  $[-2, 2]$  функція  $S(z) = i(3z - z^3)$  має чотири точки мінімакса: дві кінцеві точки  $z = \pm 2$ , та дві точки перевала  $z = \pm 1$ . Для знаходження потрібного мінімаксного контура розглянемо дійсну частину  $S(z)$ .

$$\Re S(z) = y(3x^2 - 3 - y^2) \approx / \text{малі } y / \approx 3y(x^2 - 1).$$

Таким чином, на інтервалі, де  $|x| < 1$  контур інтегрування потрібно змістити в бік додатних  $y$ , а в областях де  $|x| > 1$  — навпаки (малюнок 20). Знайдемо вклад в асимптотику від кожної із точок мінімакса. В околі точки  $z = -1$



Мал. 20: контур інтегрування та лінії стоку. Стрілки вказують напрямки зменшення  $\Re S(z)$ .

$$S(z) = -2i + 3i(z+1)^2 - i(z+1)^3. \quad (5.71)$$

Підставивши в (5.71) параметричне рівняння прямої  $z = -1 + te^{i\varphi}$  знаходимо, що необхідно покласти  $\varphi = \pi/4$ . При цьому  $S(z) = -2i - 3t^2 + \sqrt{i}t^3$ ,

$$e^{\lambda S} = e^{-2i\lambda} e^{-3\lambda t^2} (1 + \sqrt{i} \lambda t^3 + \mathcal{O}(\lambda^2 t^6)).$$

Таким чином, точка  $z = -1$  вносить в асимптотику вклад рівний

$$e^{-2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\lambda t^2} (1 + \sqrt{i} \lambda t^3 + \mathcal{O}(\lambda^2 t^6)) d(te^{i\pi/4}) = e^{-i(2\lambda - \pi/4)} \sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} (1 + \mathcal{O}(1/\lambda)). \quad (5.72)$$

Вклад від точки  $z = 1$  комплексно спряжений до (5.72), так що сумарний вклад від точок перевала  $z = \pm 1$  дорівнює

$$2\sqrt{\frac{\pi}{3\lambda}} (\cos(2\lambda - \pi/4) + \mathcal{O}(1/\lambda)). \quad (5.73)$$

В околі кінцевої точки  $z = -2$

$$S(z) = 2i - 9i(z+2) + 6i(z+2)^2 - i(z+2)^3. \quad (5.74)$$

Поклавши в (5.74)  $z = -2 - it$  отримуємо

$$S(z) = 2i - 9t - 6it^2 + \mathcal{O}(t^3); \quad e^{\lambda S} = e^{2i\lambda} e^{-9\lambda t} (1 - 6i\lambda t^2 + \mathcal{O}(\lambda t^3)).$$

Тому вклад в асимптотику від кінцевої точки  $z = -2$  дорівнює

$$-ie^{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-9\lambda t} (1 - 6i\lambda t^2 + \mathcal{O}(\lambda t^3)) dt = -ie^{2i\lambda} \left( \frac{1}{9\lambda} - \frac{4i}{243\lambda^2} + \mathcal{O}(1/\lambda^{-3}) \right). \quad (5.75)$$

Точка  $z = 2$  вносить комплексно спряжений вклад. В результаті знаходимо такий вираз для  $I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{4\pi}{3\lambda}} \cos(2\lambda - \pi/4) + \frac{2}{9\lambda} \sin 2\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{3/2}).$$

Повернемося тепер до теореми 5.3 з підрозділу 5.1. Та схема розрахунку, яку ми використовували при знаходженні а.р. в прикладі 27 є, фактично, і схемою доведення теореми 5.3 на конкретному (але типовому) прикладі. Можна провести узагальнення прийомів з прикладу 27 не конкретизуючи явний вигляд функцій  $f$  та  $S$ . Але, сподіваємось, що процедура розрахунку вже зрозуміла читачу.

Теорема 5.3 охоплює найпростіший, хоча і досить розповсюджений випадок аналітичних на  $[a, b]$  функцій  $f$  та  $S$ . Лема Ватсона з підрозділу 5.2 дозволяє узагальнити результати теореми 5.3 на деякі випадки неаналітичних на  $[a, b]$  функцій  $f(z)$ . Але, чи можливо довести аналог теореми 5.3 для нескінченного інтервалу  $(a, b)$ ? Виявляється, що ні, оскільки *не кожний* інтеграл виду (5.51) може бути досліджений на асимптотику методом перевала, наприклад, в зв'язку з відсутністю мінімаксного контура (точка мінімакса знаходиться в нескінченності), або, якщо такий контур існує, підінтегральна функція на ньому може не зводитись до вигляду інтеграла Лапласа<sup>22)</sup>.

### Співпадіння точки перевала з особливостями функції $f(z)$ .

Може бути так, що точка перевала, через яку повинен проходити мінімаксний контур  $\mathcal{C}$ , співпадає з особливою точкою функції  $f(z)$ . В цьому разі ми розглядаємо контур  $\mathcal{C}'$ , який складається із контура  $\mathcal{C}$  і дуги півкола радіуса  $r$  з центром в точці перевала. Після чого переходимо до границі  $r \rightarrow 0$ . Цей прийом зручний, коли існує скінченна границя

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_r} f(z) e^{\lambda S(z)} dz = F(\lambda). \quad (5.76)$$

Інтеграл по решті частині контура переходить в інтеграл по  $\mathcal{C}$  в сенсі головного значення (і має вигляд інтеграла Лапласа). Зокрема, границя (5.76) завжди існує, якщо особливою точкою  $f(z)$  є полюс першого порядку і прямує у нескінченність в випадку полюсів вищого порядку.

**Приклад 28.** 
$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x^2+2ix)} \ln(1+x^2) dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.77)$$

Функція  $S(z) = -z^2 - 2iz$  має одну точку перевала  $z = -i$ , яка співпадає з точкою розгалуження функції  $f(z) = \ln(1+z^2)$ . Якщо б функція  $f(z)$  не мала особливостей, то в якості мінімаксного контуру ми би взяли пряму  $z = -i + t$ , на якій  $S(z) = -1 - t^2$  і інтеграл (5.77) приймає вигляд інтеграла Лапласа. Тому в якості контура інтегрування візьмемо контур  $\mathcal{C}$ , що зображений на малюнку 20<sup>23)</sup>. Розглянемо спочатку інтеграл по півколу радіуса  $r$ .

$$z = -i + re^{i\varphi}, \quad dz = ire^{i\varphi} d\varphi \quad \Rightarrow \quad I_{\mathcal{C}_r} = \mathcal{O}(r \ln r) \rightarrow 0.$$

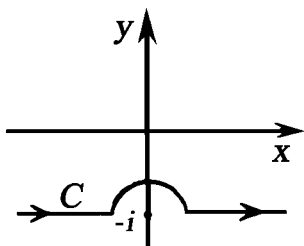
<sup>22)</sup> Попутно зауважимо, що і метод Лапласа не є "панацеєю від всіх хвороб": не кожний інтеграл виду (5.32) може бути досліджений цим методом (дивись, наприклад, інтеграл (5.5)).

<sup>23)</sup> Пропонуємо читачу довести, що інтеграл (5.77) вздовж дійсної вісі дорівнює інтегралу по контуру  $\mathcal{C}$ .

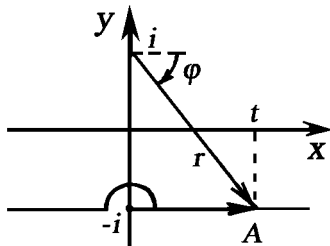
Таким чином, при  $r \rightarrow 0$  інтеграл по  $C_r$  зникає і інтеграл по  $C$  зводиться до інтеграла вздовж прямої  $z = -i + t$  в сенсі головного значення:

$$I(\lambda) = e^{-\lambda} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} \ln(t^2 - 2it) dt. \quad (5.78)$$

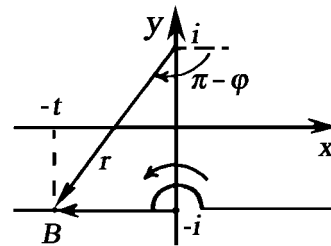
Інтеграл (5.78) розпадається на два:  $I(\lambda) = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}$  причому перший інтеграл



Мал.20



Мал.21



є комплексно спряженим до другого. Дійсно (дивись малюнок 21)

$$\begin{aligned} \text{в точці А:} \quad z - i &= r e^{-i\varphi}, \quad z + i = t & \Rightarrow & \quad \ln(1 + z^2) = \ln rt - i\varphi; \\ \text{в точці В:} \quad z - i &= r e^{-i(\pi-\varphi)}, \quad z + i = t e^{i\pi} & \Rightarrow & \quad \ln(1 + z^2) = \ln rt + i\varphi. \end{aligned}$$

Таким чином

$$I(\lambda) = 2e^{-\lambda} \Re \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^2} \ln(t^2 - 2it) dt \right). \quad (5.79)$$

Залишається розкласти функцію  $\ln(t^2 - 2it)$  в а.р. в околі  $t = 0$  і проінтегрувати почленно.

$$\begin{aligned} \ln(t^2 - 2it) &= \ln[2e^{-i\pi/2}t(1 + it/2)] = -\frac{i\pi}{2} + \ln 2 + \ln t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{it}{2}\right)^k \\ \Rightarrow \quad \Re \ln(t^2 - 2it) &= \ln t + \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t^2} \ln t dt = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1/2} (\ln x - \ln \lambda) dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} (-\ln \lambda + \psi(1/2)),$$

де  $\psi(z) = \frac{d}{dz} [\ln \Gamma(z)]$  – пси-функція, то для  $I(\lambda)$  отримуємо

$$I(\lambda) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda} \left( -\ln(\lambda/4) + \psi(1/2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k-1)!!}{k 8^k \lambda^k} \right).$$

# Додаток 1

## I. Еталонні інтеграли

$$1. \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^\alpha} x^{\beta-1} dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\beta/\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0;$$

$$2. \int_0^{\infty} e^{i\lambda x^\alpha} x^{\beta-1} dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) e^{i\frac{\pi\beta}{2\alpha}} \lambda^{-\beta/\alpha}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Частинні випадки

$$a) \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^n dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}, \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2n+1}}};$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\pm i\pi/4}.$$

Деякі допоміжні інтеграли

$$3. \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = \Gamma'(1) = -\gamma;$$

$$4. \int_0^{\infty} e^{-x} \ln^2 x dx = \Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6};$$

$$5. \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \ln x dx = \Gamma'(n+1) = n! \left( -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right);$$

$\gamma = 0,57721566490$  — постійна Ейлера.

## II. Деякі розклади

$$(1-x)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu)}{k! \Gamma(-\nu)} x^k, \quad \nu \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}, \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(n-1)!}{2^{n-1}};$$

$$\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \Gamma(z) \sin \pi z}.$$

Частинні випадки

$$a) \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n; \quad b) \sqrt{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n-1)n! 2^n} x^n.$$

## III. Числа Бернуллі

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \dots, \quad B_{2n+1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

## Додаток 2: асимптотична поведінка деяких основних спец-функцій.

1) Гамма функція Ейлера та псі-функція ( $|\arg z| < \pi$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ ).

$$\begin{aligned}\ln \Gamma(z) &= (z - 1/2) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + \mathcal{O}(z^{-2n-1}), \\ \Gamma(z) &= \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \mathcal{O}(z^{-5})\right), \\ n! &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^2} + \mathcal{O}(n^{-3})\right), \\ \psi(z) &= \Gamma'(z)/\Gamma(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + \mathcal{O}(z^{-2n-2}).\end{aligned}$$

2) Циліндричні функції.

$$\begin{aligned}J_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} (\nu, 2k+1) (2z)^{-2k-1} + \mathcal{O}(|z|^{-2n-1}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\nu, 2k) (2z)^{-2k} + \mathcal{O}(|z|^{-2n}) \right] \right\}, \quad |\arg z| < \pi. \\ Y_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\nu, 2k+1) (2z)^{-2k-1} + \mathcal{O}(|z|^{-2n-1}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\nu, 2k) (2z)^{-2k} + \mathcal{O}(|z|^{-2n}) \right] \right\}, \quad |\arg z| < \pi. \\ H_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (\nu, k) (-2iz)^{-k} + \mathcal{O}(|z|^{-n}) \right], \quad -\pi < \arg z < 2\pi, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (\nu, k) (2iz)^{-k} + \mathcal{O}(|z|^{-n}) \right], \quad -2\pi < \arg z < \pi. \\ I_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \left\{ e^z \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\nu, k) (2z)^{-k} + \mathcal{O}(|z|^{-n}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i e^{-z + i\nu\pi} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (\nu, k) (2z)^{-k} + \mathcal{O}(|z|^{-n}) \right] \right\}, \quad -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2. \\ K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (\nu, k) (2z)^{-k} + \mathcal{O}(|z|^{-n}) \right], \quad -3\pi/2 < \arg z < 3\pi/2.\end{aligned}$$

В цих формулах використано символ Ганкеля  $(\nu, n) = \frac{\Gamma(1/2 + \nu + n)}{n! \Gamma(1/2 + \nu - n)}$ .

### 3) Поліноми Лежандра та Ерміта.

$$P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left[ (n + 1/2)\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} + \mathcal{O}(1/n) \right], \quad 0 < \theta < \pi.$$

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} J_0[(n + 1/2)\theta] + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (\text{формула Хілба}).$$

$$H_n(x) = \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n/2 + 1)} e^{x^2/2} \left[ \cos(\sqrt{2n}x - \pi n/2) + \mathcal{O}(1/\sqrt{n}) \right].$$

### 4) Вироджена гіпергеометрична функція.

$$F(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^x x^{\alpha-\gamma} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma - \alpha)_k (1 - \alpha)_k}{n! x^k} + \mathcal{O}(x^{-n-1}) \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

$$F(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(1 - \gamma + \alpha)_k (\alpha)_k}{n! |x|^{\alpha+k}} + \mathcal{O}(x^{-n-\alpha-1}) \right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Тут використано позначення  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1) = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$ .

### 5) Функції Ейрі ( $|z| \rightarrow \infty$ ).

$$Ai(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + zt) dt \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2z^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (6n-1)!!}{(2n)! 72^n z^{3n/2}}, \quad |\arg z| < \pi,$$

$$Ai(-z) \sim \frac{1}{z^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(6n-1)!!}{(2n)! 72^n z^{3n/2}} \sin \left( \frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} \right), \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}.$$

Більш повну інформацію про асимптотичну поведінку спеціальних функцій можна знайти в книзі [6].



## Задачі

1. Довести, що

a)  $x^{x+\mathcal{O}(x^2)} = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + \mathcal{O}(x^2 \ln x)$ ,  $x \rightarrow +0$ ;

b)  $(x + 1 + \mathcal{O}(1/x))^x = ex^x + \mathcal{O}(x^{x-1})$ ,  $x \rightarrow \infty$ ;

c) якщо функція  $f(x)$  така, що  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$ ,  
тоді  $f(x) = o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

2. Чи виконуються рівності ( $x \rightarrow \infty$ )

a)  $2 \cos x + o(1) = (1 + o(1))2 \cos x$ ;      b)  $(1 + o(1))2 \cos x = 2 \cos x + o(1)$ ;

c)  $(1 + o(1)) \operatorname{ch} x - (1 + o(1)) \operatorname{sh} x = (1 + o(1))e^{-x}$ .

3. Нехай  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Чи вірно, що і

a)  $(f(x))^n \sim (g(x))^n$ ;      b)  $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ ;

c)  $\ln f(x) \sim \ln g(x)$ ,  $f(x), g(x) > 0$ .

4. Довести рівність ( $x \rightarrow \infty$ )

a)  $\ln(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{O}(\ln x)$ ;      b)  $(\mathcal{O}(x))^\alpha = \mathcal{O}(x^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

Чи вірна рівність  $e^{\mathcal{O}(x)} = \mathcal{O}(e^x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ ?

5. Довести, що

$$\int_0^x \mathcal{O}(f(t)) dt = \mathcal{O}\left(\int_0^x |f(t)| dt\right).$$

6. Довести рівність

$$\int_1^x \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t dt = e \left(x - \frac{1}{2} \ln x + C - \frac{11}{24x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

де  $C$  — деяка константа.<sup>1)</sup>

7. Знайти перші два члена розкладу всіх коренів рівняння ( $\epsilon \rightarrow 0$ ).

a)  $x^3 - (4 + \epsilon)x^2 + (5 - 2\epsilon)x - 2 + \epsilon^2 = 0$ ;      b)  $\epsilon x^3 + x + 2 + \epsilon = 0$ ;

c)  $\epsilon(x^5 + x^4 - 2x^3) - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ ;      d)  $\epsilon^2 x^6 - \epsilon x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$ .

8. Знайти кілька перших членів асимптотичного розв'язку рівняння і оцінити залишок.

a)  $x^2(1 + e^x) = t^{-1}$ ,  $t \rightarrow \infty$ ;      b)  $\sqrt{x} \ln x = t^{-1}$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ;

c)  $x^x = t$ ,  $t \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow 1$ ;      d)  $x^x = t$ ,  $t \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow 0$ ;

e)  $x^x = t$ ,  $t \rightarrow \infty$ ;      f)  $\sin x_n = (\ln x_n)^{-1}$ ,  $n \rightarrow \infty$ .<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Вказівка. Доведіть спочатку, що  $(1 + 1/t)^t = e(1 - 1/2t + 11/24t^2 + \mathcal{O}(t^{-3}))$ .

<sup>2)</sup> Спорбуйте знайти повний а.р.

9. Виходячи з асимптотичного розкладу для функції Бесселя ( $x \rightarrow \infty$ )

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4) + \mathcal{O}(x^{-2}) \right\}$$

показати, що великі за номером корені рівнянь  $J_\nu(\xi_n) = 0$  та  $J'_\nu(\zeta_n) = 0$  даються наближеними формулами

$$\xi_n = (n - 1/4 + \nu/2)\pi - \frac{4\nu^2 - 1}{2\pi(4n - 1 + 2\nu)},$$

$$\zeta_n = (n - 3/4 + \nu/2)\pi - \frac{3 + 4\nu^2}{2\pi(4n - 3 + 2\nu)}.$$

Ці формули дають надзвичайно гарне узгодження ( $\simeq 0,2\%$ ) вже при  $n = 1!$

10. За допомогою метода підсумовування довести асимптотичні рівності.

a) 
$$\sum_{k=1}^n \ln k = \ln n! = \ln \left[ \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \mathcal{O}(1/n^2)\right) \right] + C_0;$$

b) 
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + n^2}} = \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}(1/n^2);$$

c) 
$$\sum_{k=1}^n \ln(k + n) = n \ln n + n(2 \ln 2 - 1) + \ln \sqrt{2} - \frac{1}{24n} + \mathcal{O}(1/n^3).$$

11. Використовуючи перетворення Абеля показати, що

a) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e^{-n^2 x} = -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \gamma + \mathcal{O}(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0;^3)$$

b) довести формулу підсумовування Ейлера - Маклорена

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(n)) + R_{2m+1};$$

c) отримати формулу підсумовування

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k + 1/2) = \int_0^n f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{2^{2k-1} - 1}{2^{2k-1} (2k)!} B_{2k} (f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(n)) + R_{2m+1}, \text{ де } R_{2m+1} = \mathcal{O}\left(\int_0^n |f^{(2m+1)}(x)| dx\right)^4.$$

12. Показати, що

a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 - be^{-nx}) = \frac{c-1}{x} + c_0 + c_1 x + \dots, \quad 0 < b < 1, \quad x \rightarrow 0,$$

<sup>3)</sup> Тут і далі  $\gamma$  – постійна Ейлера (дивись додаток 1).

<sup>4)</sup> Вказівка. Запишіть суму у вигляді

$$\sum_{k=0}^n f(k + 1/2) = A(n + 1)f(n + 1) - \int_0^{n+1} A(x)f'(x) dx, \text{ де } A(x) = n, \quad n - 1/2 \leq x < n + 1/2.$$

де  $c_n = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} b^k k^{n-1}$ ,  $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ ;  $B_n$  – числа Бернуллі.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{\sqrt{n^2 + x^2}} = \frac{1}{x(a-1)} - \frac{1}{2x^3} \cdot \frac{a(1+a)}{(a-1)^3} + \mathcal{O}(x^{-5}), \quad a > 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

13. Показати, що при  $x \rightarrow 0$

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-nx}) = -\frac{\pi^2}{6x} - \frac{1}{2} \ln x + \mathcal{O}(1); \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k e^{-xk^2} = \frac{1}{4} + \frac{x}{8} + \mathcal{O}(x^2);$$

$$c) \sum_{-\infty}^{+\infty} k^{2n} e^{-xk^2} = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n x^{n+1/2}} + \text{е.м.ч.}; \quad d) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-xk^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{12} + \mathcal{O}(x).$$

14. Інтегруванням частинами довести наступні асимптотичні розклади:

$$a) F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) p^{-n-1}, \quad p \rightarrow \infty;$$

$$b) F(\omega) = \int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx \sim \frac{1}{i\omega} \left\{ e^{i\omega b} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (i\omega)^{-n} - e^{i\omega a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\omega)^{-n} \right\},$$

де  $a_n = (-1)^n f^{(n)}(a)$ ,  $b_n = (-1)^n f^{(n)}(b)$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ . Яким умовам повинні задовольняти функції  $f(x)$  в а) та б) для того, щоб були справедливі ці розклади?

$$c) \int_0^x t^\alpha (\ln t)^n dt = \mathcal{O}(x^{\alpha+1} (\ln x)^n), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{і}$$

$$\int_2^x t^\alpha (\ln t)^n dt = \mathcal{O}(x^{\alpha+1} (\ln x)^n), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha > -1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$d) I(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t+x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$I(x) = -\ln x - \gamma + o(1), \quad x \rightarrow 0;$$

$$e) J(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}} dt = -\ln x + 2 \ln 2 - \gamma + o(1), \quad x \rightarrow 0.$$

15. Використовуючи метод Лапласа або метод стаціонарної фази довести асимптотичні рівності ( $x \rightarrow +\infty$ ).

$$a) \int_0^{\infty} e^{-xt^\alpha} \ln(1+t) dt \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)}{k x^{(k+1)/\alpha}}, \quad \alpha > 0;$$

$$b) \int_0^{\infty} t^{-xt} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{xe}} e^{x/e};$$

<sup>5)</sup> е.м.ч.— експоненційно малі члени (дивись примітку 10 на сторінці 39).

- c)  $\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{x^{2k+1}};$
- d)  $\int_0^{\infty} e^{-x/t} \frac{dt}{1+t^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{x^{2n+1}};$
- e)  $\int_1^{\infty} t^\alpha \left(\frac{xe}{t}\right)^t dt \sim \sqrt{2\pi x} x^\alpha e^x;$
- f)  $\int_1^{\infty} t^{-2} e^{-x \sin^2 t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \left(\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^{-1})\right);$
- g)  $\int_0^1 e^{tx} (1+t^2)^{-x} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot \frac{e}{2^x};$
- h)  $\sum_{k=0}^n C_n^k k! n^{-k} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n C_n^k k! n^{-k} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda^2}{n(1-\lambda)^3} + \mathcal{O}(1/n^2),$   
 $0 < \lambda < 1;$ <sup>6)</sup>
- i)  $\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} = x^{a-b} \left(1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2x} + \mathcal{O}(1/x^2)\right);$ <sup>7)</sup>
- j)  $\int_0^1 e^{ixt^3} \ln(2+t) dt = \frac{\Gamma(1/3) e^{i\pi/6} \ln 2}{3x^{1/3}} + \frac{\Gamma(2/3) e^{i\pi/3}}{6x^{2/3}} + \mathcal{O}(1/x);$
- k)  $\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt \sim \sqrt{\frac{\pi i}{x}} + e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+1} (2n-1)!!}{2^n x^{n+1}};$
- l)  $Ai(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(t^3/3 - tx) dt = \frac{1}{x^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(1/x);$
- m)  $\int_0^{\pi/2} (1 - \cos t) e^{ixt^2} dt = -\frac{i}{\pi x} e^{ix\pi^2/4} + \frac{i\sqrt{\pi}}{8x^{3/2}} e^{i\pi/4} + \mathcal{O}(1/x^2);$
- n)  $\int_0^{\pi/2} t \sin(x \cos t) dt = \frac{1}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) - \frac{\sin x}{3x^2} + \mathcal{O}(x^{-3});$
- o)  $\int_0^{\infty} t \cos[t^2(\ln t - x)] dt = \sqrt{\frac{\pi}{e}} e^x \cos\left(\frac{1}{2}e^{2x-1} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(1).$

16. Зміщуючи контур інтегрування в комплексну площину, привести інтеграли до вигляду інтеграла Лапласа і довести асимптотичні рівності ( $x \rightarrow +\infty$ ).

- a)  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x};$
- b)  $\int_1^{\infty} \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [(2n-1)!!]^2}{2^{3n} n! x^n} \sin(x + \pi/4 + \pi n/2);$

<sup>6)</sup> Вказівка.  $k! n^{-k-1} = \int_0^{\infty} e^{-nx} x^k dx$ .

<sup>7)</sup> Вказівка. Скористайтеся співвідношенням  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ .

$$\begin{aligned}
\text{c) } & \int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{n-1/2} dt = \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1/2} \left[ \Gamma(n+1/2) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}(n+1/2)\right) + \mathcal{O}(1/x) \right]; \\
\text{d) } & \int_0^1 \ln t e^{ixt} dt \sim -\frac{i \ln x}{x} - \frac{i\gamma + \pi/2}{x} - e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{x^{n+2}} n!; \\
\text{e) } & \int_0^{\pi n} t^\alpha \cos t dt = -\Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{(-1)^n \alpha}{(\pi n)^{1-\alpha}} + \mathcal{O}(n^{\alpha-3}), \\
& \alpha > -1, n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

17. Використовуючи різні методи довести асимптотичні рівності

$$\begin{aligned}
\text{a) } & I = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2xt}{t^2+1}\right) \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \mathcal{O}(x^{-5}), \quad x \rightarrow \infty, \\
& I = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3) \quad x \rightarrow 0; \text{ 8)} \\
\text{b) } & \int_0^x \frac{\ln t}{t} \sin^2(t/2) dt = \frac{(\ln x)^2}{4} + \frac{1}{4} \left( \frac{\pi^2}{12} - \gamma^2 \right) - \frac{\ln x}{2x} \sin x + \mathcal{O}(\ln x/x^2), \quad x \rightarrow \infty; \\
\text{c) } & I = \int_0^\infty e^{-t} \ln(t+x) dt = -\gamma - x \ln x + \mathcal{O}(x), \quad x \rightarrow 0, \text{ 9)} \\
& I \sim \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}, \quad x \rightarrow \infty; \\
\text{d) } & I = \int_0^\infty \frac{\ln t}{x+t} \sin t dt = -\frac{\gamma}{x} + \frac{\pi}{2x^2} + \mathcal{O}(x^{-3}), \quad x \rightarrow \infty; \text{ 10)} \\
& I = -\frac{\pi\gamma}{2} + \frac{1}{2} x \ln^2 x + \mathcal{O}(x); \quad x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

18. За допомогою метода перевала довести асимптотичні рівності ( $x \rightarrow +\infty$ ). Обґрунтувати вибір контура.

$$\begin{aligned}
\text{a) } & \int_{-\infty}^\infty e^{ix \operatorname{sh} t} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2}{n!(8x)^n}; \\
\text{b) } & \int_0^\infty \sin(t^3/3 + xt) dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{3^n n! x^{3n+1}}; \\
\text{c) } & Ai(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt) dt \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2x^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n-1)!!}{(2n)! 72^n x^{3n/2}}; \\
\text{d) } & Ai(-x) \sim \frac{1}{x^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n-1)!!}{(2n)! 72^n x^{3n/2}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right);
\end{aligned}$$

8) Точніше  $I \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2}{x^{2n+1}}$ ,  $x \rightarrow \infty$ ;  $I = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\Gamma(n/2+1)]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ ,  $x \rightarrow 0$ .

9) Спробуйте знайти вираз для повного а.р.

10) Точніше  $I \sim \frac{1}{x} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)! C_{2n}}{x^{2n}} + \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{x^{2n+1}} \right\}$ , де  $C_n = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ;  $C_0 = -\gamma$ .

$$e) \int_{\mathcal{C}} e^{x(t-\ln t)} dt = e^x \left( i\sqrt{\frac{\pi}{2x}} - \frac{2}{3x} + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \right),$$

де  $\mathcal{C}$  – півкола в верхній півплощині комплексної змінної  $t$ , що починається в точці  $t = 1$  і закінчується в точці  $t = -1$ .

$$f) \int_{-\infty+i}^{\infty+i} e^{-t^2} \frac{dt}{t^{2x}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e}{x}\right)^x e^{-i\pi x};$$

$$g) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} t^2 e^{-xt^2} dt \sim i\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x-1}\right);$$

$$h) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} (1+t^2)^{-x} dt \sim \sqrt{\frac{\pi(1-c)}{x}} e^{-cx} (2c)^{-x}, \quad c = \sqrt{2} - 1;$$

$$i) \int_0^{\infty} \frac{e^{ix(t^3+3t)}}{\sqrt{1+t^2}} dt \sim \frac{i}{x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(t^3+3t)}}{\sqrt{1+t^2}} dt \sim \frac{\Gamma(1/4)}{2(3x)^{1/4}} e^{-2x};$$

$$j) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x(t^2-2it)}}{\operatorname{sh}(1+t^2)} dt \sim e^{-x} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x}} + \mathcal{O}(x^{-3/2}) \right).$$

19. Коефіцієнти розкладу функції  $f(z)$  в ряд Лорана в околі  $z = 0$  даються формулою (5.58). Використовуючи метод перевала, отримайте з (5.58) наступні асимптотичні формули для коефіцієнтів  $a_n$  ( $n \rightarrow +\infty$ ):

$$a) f(z) = e^z, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n (1 + \mathcal{O}(1/n));$$

$$b) f(z) = e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n, \quad a_n = J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{xe}{2n}\right)^n (1 + \mathcal{O}(1/n)).$$

## Список літератури

- [1] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. - М., Наука, 1978.
- [2] Де Брэйнь Н.Г. Асимптотические методы в анализе. - М., ИЛ, 1961.
- [3] Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. Серия СМБ – справочная математическая библиотека, М., Наука, - 1987.<sup>11)</sup>
- [4] Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. - М., Физматгиз, 1962.
- [5] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1989.
- [6] Бейтмен Г, Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1965, т. 1-3.

<sup>11)</sup> Ця книга є розширеним варіантом книги "Метод перевала" того ж автора (!! обидві книги мають велику кількість опечаток).