

# Зміст

1.	Вступ. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до канонічного вигляду . . . . .	3
2.	Метод характеристик. . . . .	11
3.	Метод розділення змінних . . . . .	13
3.1	Задача про вільні коливання обмеженої струни. . . . .	13
3.2	Фізична інтерпретація розв'язку задачі. . . . .	21
3.3	Залежність розв'язку задачі про коливання струни від вибору крайових умов. . . . .	24
3.4	Колівання струни під дією зовнішніх сил. . . . .	27
3.5	Загальна перша крайова задача . . . . .	33
3.6	Питання та завдання до розділу Метод розділення змінних	36
4.	Задачі з використанням $\delta$ -функцій. . . . .	42
5.	Метод розділення змінних з використанням спеціальних функцій. . . . .	43
6.	Інтегральні рівняння. . . . .	46

# 1. Вступ. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до канонічного вигляду

Теоретичні дослідження різноманітних фізичних процесів і явищ в багатьох випадках зводяться до розв'язування задач, основними складовими яких є диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Прикладами таких рівнянь є: хвильове рівняння, що описує динаміку поширення хвиль різної природи, рівняння теплопровідності і дифузії, що описують процеси перенесення в середовищі теплоти або речовини, рівняння Лапласа і Пуасона, добре відомі з розділу "Електростатика", тощо. Ключове рівняння квантової механіки – рівняння Шрьодінгера також являє собою диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними.

Основні властивості диференціальних рівнянь з частинними похідними розглянемо спочатку на прикладі рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, загальний вираз якого можна представити у вигляді:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (1.1)$$

тобто це – деяке співвідношення між незалежними змінними  $x, y$ , шуканою функцією  $u(x, y)$ , частинними похідними першого  $u_x, u_y$  та другого  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  порядків від шуканої функції. Тут і надалі для скорочення використовуються такі позначення:  $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Розв'язком рівняння (1.1) називається будь-яка функція  $u(x, y)$ , що перетворює дане рівняння в тотожність.

В університетському курсі фізики застосовуються переважно лінійні диференціальні рівняння. *Лінійні диференціальні рівняння* другого порядку з частинними похідними з двома незалежними змінними самого загального вигляду представляються виразом:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (1.2)$$

де коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  та функція  $f$  залежать тільки від змінних  $x, y$  і не залежать від шуканої функції  $u$  та її похідних. Функція  $f(x, y)$  вважається заданою. Якщо  $f(x, y) \equiv 0$ , то рівняння (1.2) називається *однорідним*. Коефіцієнти  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  і  $a_{22}$  називають коефіцієнтами при старших похідних (тобто при похідних найвищого, в даному рівнянні, порядку).

Часто замість змінних  $x, y$  в рівнянні (1.2) доцільно обрати інші, нові незалежні змінні  $\xi, \eta$ , що пов'язані зі "старими" змінними певним чином:  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ . Незалежність нових змінних  $\xi$  і  $\eta$  між собою визначається умовою відмінності від нуля Якобіану переходу до нових змінних:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0. \quad (1.3)$$

При переході від старих змінних до нових рівняння (1.1) або (1.2) певним чином перетворюється. При цьому лінійне рівняння завжди перетворюється в лінійне. В перетвореному рівнянні шукана функція, її похідні і коефіцієнти рівняння залежать від нових змінних. Шляхом певного цілеспрямованого вибору нових змінних рівняння (1.2) можна суттєво спростити, звівши його до типового, так званого *канонічного* виду. В залежності від значення виразу (*дискримінанту*)  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ , складеного з коефіцієнтів рівняння (1.2), останнє відноситься до одного з трьох типів.

При  $D > 0$  рівняння (1.2) має назву рівняння *гіперболічного* типу. Будь-яке рівняння гіперболічного типу шляхом належного вибору нових змінних  $\xi = \xi(x, y)$  і  $\eta = \eta(x, y)$  можна звести до відповідного канонічного виду (розглядається випадок однорідного рівняння, коли  $f = 0$ ):

$$u_{\xi\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = 0. \quad (1.4)$$

Наступним перетворенням, шляхом вибору інших змінних  $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$  рівняння (1.4) можна представити в іншій формі

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \tilde{b}_1 u_\alpha + \tilde{b}_2 u_\beta + \tilde{c}u = 0, \quad (1.5)$$

що також вважається канонічною.

Якщо  $D < 0$ , то рівняння (1.2) називається рівнянням *еліптичного* типу і канонічний вид цього рівняння представляється виразом:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\alpha + \bar{b}_2 u_\beta + \bar{c}u = 0. \quad (1.6)$$

Якщо  $D = 0$ , то рівняння (1.2) має назву рівняння *параболічного* типу, і канонічна форма такого рівняння записується у вигляді

$$u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\alpha + \bar{b}_2 u_\beta + \bar{c}u = 0. \quad (1.7)$$

Назви "гіперболічний", "еліптичний" та "параболічний" тип надано рівнянням, виходячи з аналогії, при порівнянні з назвами кривих другого порядку, що описуються квадратичною формою загального виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0. \quad (1.8)$$

Якщо  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ , то рівняння (1.8) є рівнянням гіперболи, якщо  $D < 0$ , то відповідна крива є еліпсом, якщо  $D = 0$  – параболою.

Слід зауважити, що рівняння різного типу відрізняються одне від одного не тільки зовнішнім виглядом, а що є більш суттєвим, вони якісно відрізняються характером розв'язків і описують принципово різні фізичні процеси

і явища. Рівняння гіперболічного типу виражають динаміку хвильових процесів. Розв'язки таких рівнянь, зокрема, описують поширення звукових або електромагнітних хвиль а також стоячі хвилі в різних середовищах. Рівняння параболічного типу описують процеси дифузії або поширення теплоти. Розв'язки рівнянь еліптичного типу, як правило, описують стаціонарний розподіл температури в середовищі, стаціонарний розподіл концентрації речовини, або розподіл в просторі електростатичного потенціалу при заданому розподілі зарядів.

Якщо коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $b_i$  та  $c$  в рівнянні (1.2) є сталими величинами, тобто не залежать від  $x$  і  $y$ , то після зведення до канонічного виду рівняння залишаються рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Канонічну форму рівняння із сталими коефіцієнтами можна ще додатково спростити шляхом заміни шуканої функції:  $u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}v(\xi, \eta)$ . Належним підбором значень параметрів  $\lambda$  і  $\mu$  рівняння зводиться до наступного остаточного вигляду:

$$v_{\xi\eta} + \gamma v = 0, \quad \text{або} \quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v = 0 \text{— рівняння гіперболічного типу.}$$

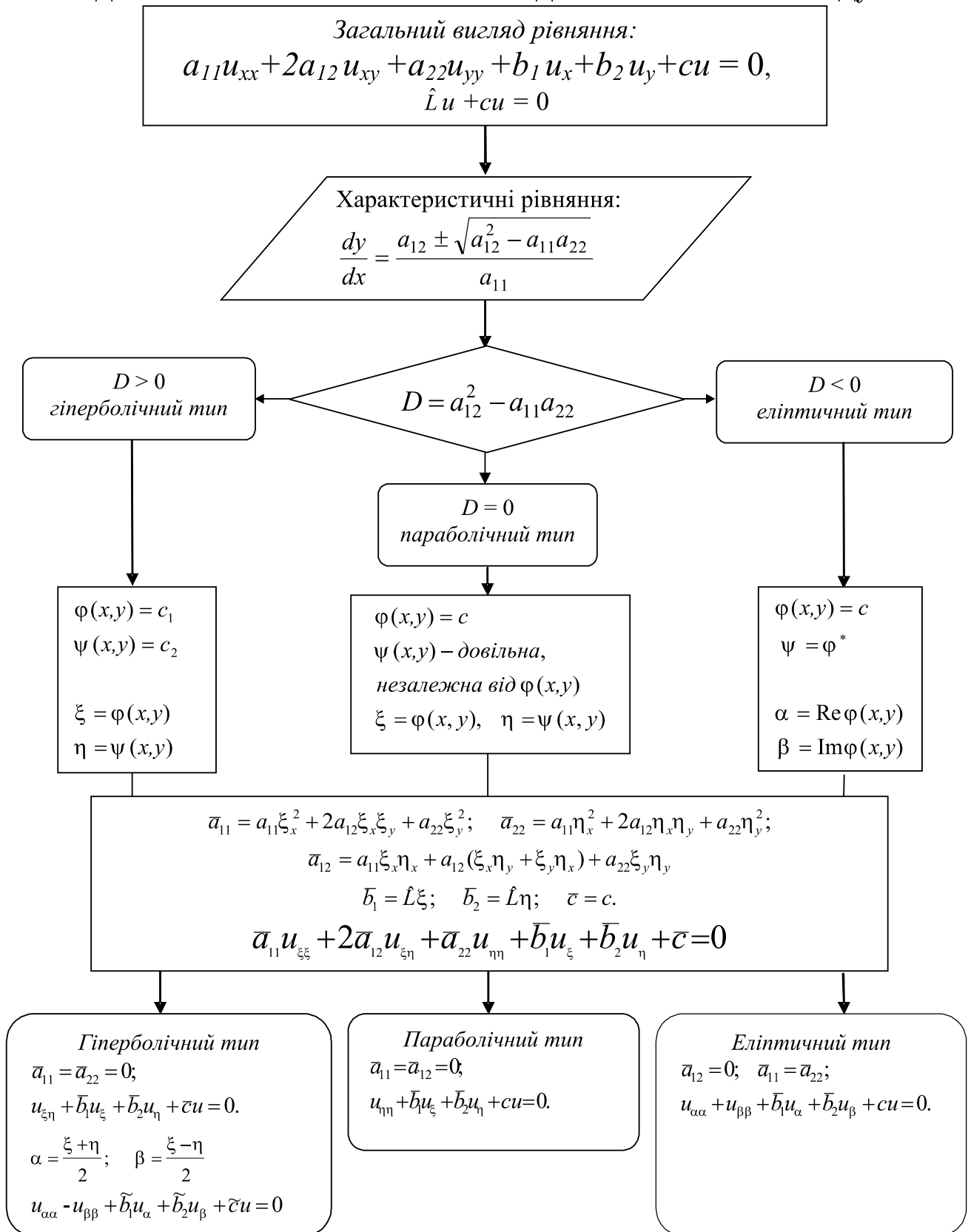
$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v = 0 \text{— рівняння еліптичного типу.}$$

$$v_{\eta\eta} + \bar{b}_2 v_\eta + \gamma v = 0 \text{— рівняння параболічного типу.}$$

Теоретичне обґрунтування зведення рівняння до канонічного виду наведене в [2].

На допомогу практичній процедурі зведення рівнянь до канонічного виду наводимо схему, в якій відображена послідовність дій для отримання канонічного виду рівняння.

Схема зведення диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними до канонічного вигляду.



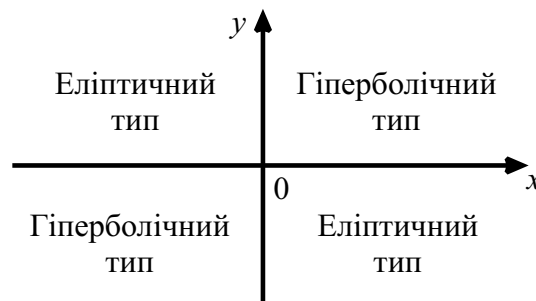
Застосування таблиці демонструється в наступному прикладі.

### Приклад 1

Звести до канонічного виду рівняння:

$$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}u_y = 0$$

- Порівнюємо дане рівняння із загальним виразом (1.2) для лінійного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними і визначаємо коефіцієнти рівняння:  $a_{11} = x$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = -y$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $b_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 0$ .
- Визначаємо дискримінант  $D$  і встановлюємо тип рівняння.  $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \Rightarrow D = xy$ . Звідси видно, що в залежності від знаків  $x$  та  $y$  дискримінант може бути додатнім або від'ємним.



На площині  $(x, y)$  встановлюємо області в, яких дискримінант має постійний знак. В першому квадранті ( $x > 0, y > 0$ ) та в третьому квадранті ( $x < 0, y < 0$ ) дискримінант  $D > 0$  і, отже, дане рівняння є рівнянням гіперболічного типу. В другому ( $x < 0, y > 0$ ) і в четвертому ( $x > 0, y < 0$ ) квадрантах дискримінант  $D < 0$ . Отже, рівняння відноситься до рівнянь еліптичного типу. Вздовж координатних осей рівняння має параболічний тип ( $D = 0$ ).

Визначаємось, з областю в якій треба звести рівняння до канонічного виду. Оберемо, наприклад, перший квадрант, тобто область де  $x > 0$  і  $y > 0$ .

- Записуємо характеристичне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{xy}}{x}, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

Двом знакам "+" та "-" відповідають два різні характеристичні рівняння:

$$1) y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}, \quad 2) y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}.$$

- Інтегруємо диференціальні рівняння першого порядку і знаходимо відповідні загальні інтеграли:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = \tilde{C}_1 \\ 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \tilde{C}_2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = C_2. \end{cases}$$

Згідно теорії, нові змінні  $\xi$  та  $\eta$  обираються формальною заміною  $C_1 \rightarrow \xi$ ,  $C_2 \rightarrow \eta$ :  $\xi = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ,  $\eta = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ , або

$$\begin{cases} \xi = x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \\ \eta = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Для знаходження коефіцієнтів перетвореного рівняння попередньо знаходимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{2}x^{-1/2} & \eta_x &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ \xi_{xx} &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} & \eta_{xx} &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \\ \xi_y &= -\frac{1}{2}y^{-1/2} & \eta_y &= \frac{1}{2}y^{-1/2} \\ \xi_{yy} &= \frac{1}{4}y^{-3/2} & \eta_{yy} &= -\frac{1}{4}y^{-3/2} \\ \xi_{xy} &= 0 & \eta_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

- Обчислюємо коефіцієнти перетвореного рівняння:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\eta_y + a_{22}\xi_y^2 = x \left( \frac{1}{2}x^{-1/2} \right)^2 + 0 - y \left( -\frac{1}{2}y^{-1/2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = x \left( \frac{1}{2}x^{-1/2} \right)^2 + 0 - y \left( \frac{1}{2}y^{-1/2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= x \left( \frac{1}{2}x^{-1/2} \right) \left( \frac{1}{2}x^{-1/2} \right) + 0 - y \left( -\frac{1}{2}y^{-1/2} \right) \left( \frac{1}{2}y^{-1/2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \hat{L}\xi = x\xi_{xx} - y\xi_{yy} + \frac{1}{2}\xi_x - \frac{1}{2}\xi_y = \\ &= x \left( -\frac{1}{4}x^{-3/2} \right) - y \left( \frac{1}{4}y^{-3/2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}x^{-1/2} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}y^{-1/2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_2 &= \hat{L}\eta = x\eta_{xx} - y\eta_{yy} + \frac{1}{2}\eta_x - \frac{1}{2}\eta_y = \\ &= x \left( -\frac{1}{4}x^{-3/2} \right) - y \left( -\frac{1}{4}y^{-3/2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}x^{-1/2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}y^{-1/2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\bar{c} = c = 0.$$

Зауважимо, що в даному випадку обчислення коефіцієнтів  $\bar{a}_{11}$  та  $\bar{a}_{22}$  не є обов'язковим, оскільки, згідно теорії у випадку рівнянь гіперболічного типу ці коефіцієнти завжди дорівнюють нулю. Але безпосереднє обчислення коефіцієнтів  $\bar{a}_{11}$  та  $\bar{a}_{22}$  дозволяє перевірити правильність знаходження загальних інтегралів характеристичних рівнянь.

- Враховуючи отримані значення нових коефіцієнтів, запишемо перетворене рівняння:

$$2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} = 0,$$

або остаточно:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

В даному випадку, завдяки спеціальному вибору коефіцієнтів  $a_{ij}$  і  $b_i$ , кінцевий вираз для рівняння виявився найпростішим з усіх можливих для рівнянь гіперболічного типу. В більш загальному випадку, після всіх наведених вище операцій, рівняння гіперболічного типу набуває вигляду:

$$2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u = 0,$$

або після ділення на  $2\bar{a}_{12}$ :

$$u_{\xi\eta} + \tilde{b}_1u_\xi + \tilde{b}_2u_\eta + \tilde{c}u = 0.$$

Тут коефіцієнти  $\tilde{b}_1$ ,  $\tilde{b}_2$  та  $\tilde{c}$  можуть залежати від старих змінних  $x$  та  $y$ . За допомогою оберненого перетворення, з рівностей  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  старі змінні виражаємо через нові:  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  і підставляємо в коефіцієнти  $\tilde{b}_1$ ,  $\tilde{b}_2$  та  $\tilde{c}$ . Тоді рівняння запишеться виключно через нові змінні  $\xi$  та  $\eta$ .

Аналогічно можна звести рівняння до канонічного виду і в інших квадрантах.

Для впевненого засвоєння методу рекомендується самостійно опрацювати наведені нижче завдання.



Звести до канонічного виду та спростити рівняння:

1.1.  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x) u_{yy} = 0$

1.2.  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2u_y = 0$

1.3.  $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$

1.4.  $\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1.5.  $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2) u_x = 0$

1.6.  $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} + xu_x + u_y = 0$

1.7.  $u_{xx} + yu_{yy} = 0$

1.8.  $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0$

1.9.  $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$

1.10.  $\operatorname{sign} x u_{xx} + 2u_{xy} + \operatorname{sign} y u_{yy} = 0$

1.11.  $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

1.12.  $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} - u = 0$

1.13.  $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0$

1.14.  $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$

1.15.  $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$

1.16.  $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$

1.17.  $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$

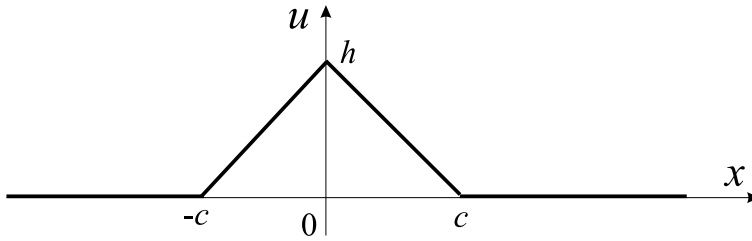
1.18.  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - u = 0$

1.19.  $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$

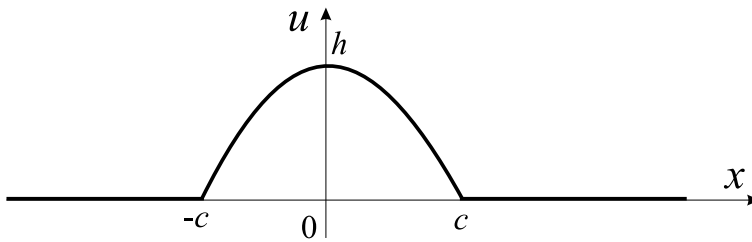
1.20.  $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$

## 2. Метод характеристик.

- 2.1. В момент часу  $t = 0$  необмежена струна була збуджена відхиленням, зображеним на рисунку. Намалювати профілі струни для моментів часу  $t_k = \frac{kc}{4a}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 5$ .

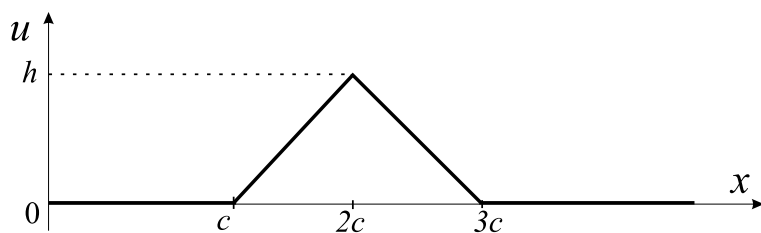


- 2.2. По необмеженій струні біжить хвиля  $\varphi(x - at)$ , де  $\varphi$  – незалежна функція. Приймаючи цю хвилю за початкове збурення струни при  $t = 0$ , знайти стан струни при  $t > 0$ .
- 2.3. Безмежна струна в початковий момент на ділянці  $x \in [-c, c]$  має форму симетричної параболи. (а) Знайти профіль струни (аналітичний вираз для зміщення  $u(x, t)$ ) у будь-який момент  $t > 0$ . (б) Знайти зміщення точок струни з різними значеннями координати  $x$ .



- 2.4. В початковий момент часу частина  $x \in [-c, c]$  необмеженої струни мала поперечну швидкість  $v_0$ , всі інші частини струни мали нульову швидкість. (а) Знайти аналітичні формули для зміщення струни з різними значеннями координати при  $t > 0$ . (б) Намалювати профілі струни для моментів часу  $t_k = \frac{kc}{4a}$ ,  $k = 0, 2, 4, 6$ .
- 2.5. В початковий момент часу в точці  $x = x_0$  по необмеженій струні вдарили вузьким молоточком, надавши струні імпульс  $I$ . Знайти відхилення  $u(x, t)$  точок струни від положення рівноваги при  $t > 0$ , якщо початкові зміщення точок струни дорівнюють нулю.

- 2.6.** Напівобмежена струна в початковий момент часу має форму, що зображена на рисунку. Намалювати профіль струни при  $t_k = \frac{kc}{2a}$ ,  $k = 0, 2, 3, 4, 7$ , якщо (а) струна закріплена на кінці; (б) струна має вільний кінець.



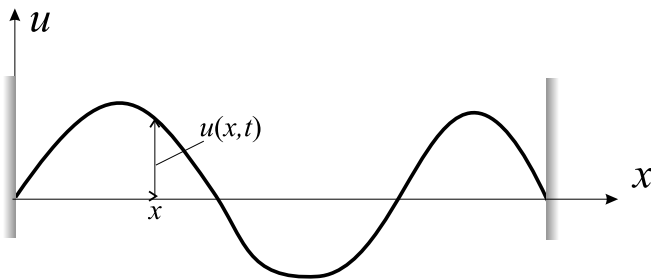
- 2.7.** Знайти відхилення від положення рівноваги  $u(x, t)$  струни довжиною  $l$ , якщо кінці  $x = 0, x = l$  закріплені, початкова швидкість дорівнює нулю, а початкове зміщення задане:  $u(x, 0) = A \sin(\pi x/l)$  при  $x \in [0, l]$ .
- 2.8.** Розв'язати задачу **2.5** для напівобмеженої струни з закріпленим кінцем.

### 3. Метод розділення змінних

Метод розділення змінних, або метод Фур'є, є потужним і найбільш поширеним засобом розв'язування задач математичної фізики. Опанування даного методу є передумовою засвоєння різноманітних питань теоретичної і математичної фізики. Зокрема, задача на власні значення, або задача Штурма-Ліувілля, що є обов'язковою складовою методу розділення змінних, містить в собі ключ до розуміння квантування (набуття дискретних можливих значень) фізичних величин в квантовій механіці.

Типовими задачами, до розв'язування яких застосовується метод розділення змінних, є крайові задачі в обмежених областях з рівняннями гіперболічного, параболічного і еліптичного типів. Ефективність методу полягає у суттєвому спрощенні задачі шляхом зведення проблеми розв'язування диференціального рівняння з частинними похідними до розв'язування звичайного диференціального рівняння. Безпосередньо сам метод являє собою певну послідовність дій, які за своєю суттю однакові для різних задач, незалежно від їх фізичного змісту і складності. Отже, зміст методу розділення змінних можна пояснити на прикладі досить простої фізичної задачі.

#### 3.1 Задача про вільні коливання обмеженої струни.



Обговоримо фізичний зміст задачі, та сформулюємо її повну математичну постановку. Натягнута струна довжиною  $l$ , що закріплена жорстко на кінцях, може коливатись в поперечному відносно струни напрямку. Нехай в початковий момент  $t_0 = 0$  кожна точка струни зміщена в поперечному напрямку на величину  $u(x, 0) = \varphi(x)$  і рухається із швидкістю  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , де  $x$  – координата точки в стані спокою струни в положенні рівноваги. Початкові відхилення всіх точок струни і початкові швидкості лежать в одній площині (площина  $(u, x)$ ). Отже, зрозуміло що коливання струни буде відбуватись в тій самій площині. Вважаємо, що на струну в поперечному напрямку не діють ніякі зовнішні сили. Під дією внутрішніх сил, внаслідок початкового зміщення від положення рівноваги і внаслідок наявності початкової швидкості, точки струни будуть певним чином коливатись навколо положення рівноваги. Задача полягає в тому, щоб знайти зміщення  $u(x, t)$  будь-якої точки струни  $0 < x < l$

в довільний момент часу  $t > 0$ .

Математичне формулювання даної задачі стисло записується у вигляді:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

Шукана функція  $u(x, t)$  залежить від двох змінних: координати  $x$  і часу  $t$ . Диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними (3.1) описує динаміку процесу коливань сукупності усіх точок струни. При виведенні даного рівняння враховано другий закон Ньютона і закон Гука, і крім того, вважалось, що внутрішнє тертя відсутнє і, як зазначено вище, відсутні зовнішні сили. Параметр  $a$ , що входить в рівняння, залежить від сили натягу струни  $T$  і лінійної густини (маси одиниці довжини) струни  $\rho$ :  $a = \sqrt{T/\rho}$ . Крайові умови (3.2) відображають фізичні умови на кінцях струни, а саме: кінці струни жорстко закріплені, отже, зміщення точок, що мають координати  $x = 0$ ,  $x = l$ , дорівнюють нулю в усі моменти часу  $t > 0$ .

Зміст початкових умов (3.3) з'ясовано вище. При математичному формулюванні задачі слід обов'язково вказати також межі, в яких набувають значень незалежні змінні  $x$  і  $t$ .

Під *коректною постановкою задачі* розуміють наступне: кількість умов, що додаються до рівняння (3.1), повина бути такою, щоб, з одного боку, не було зайвих, інакше розв'язку може не існувати взагалі, а з іншого боку, ця кількість повина бути достатньою, щоб розв'язок був однозначним. Отже, при коректній постановці розв'язок задачі існує і він лише один. При математичному формулюванні фізичної задачі додаткові умови відображають реальні фізичні умови і інтуїція фізика допомагає поставити задачу коректно.

В математичній фізиці розв'язується не рівняння, а задача в цілому. Отже, розв'язувати задачу слід починати лише після її повного коректного математичного формулювання. Оскільки задачу (3.1)-(3.3) сформульовано повністю і коректно, перейдемо безпосередньо до розв'язання задачі, і для цього застосуємо саме *метод розділення змінних*.

Процес розв'язування розіб'ємо на декілька послідовних кроків. Спочатку поставимо завдання не в повному обсязі задачі, а сформулюємо так звану *основну допоміжну задачу*:

*Знайти нетривіальні розв'язки рівняння (3.1), що задовольняють крайовим умовам (3.2) і мають вигляд добутку двох функцій:*

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (3.4)$$

кожна з яких ( $X(x)$  та  $T(t)$ ) залежить лише від однієї незалежної змінної (лише від  $x$  або від  $t$ ).

Тут під виразом *нетривіальні розв'язки*, як це звичайно прийнято, розуміють розв'язки, що не дорівнюють нулю тотожно:  $u(x, t) \not\equiv 0$ . Зауважимо, що в основній допоможній задачі початкові умови до уваги не беруться. Далі вимагаємо, щоб функція  $u(x, t)$  задовольняла рівнянню (3.1), для цього підставимо в рівняння (3.1) функцію  $u(x, t)$  у вигляді (3.4). Похідні по часу  $t$  позначимо крапками, а похідні по координаті  $x$  – штрихами: дві крапки і два штрихи означатимуть відповідні похідні другого порядку:

$$X(x) \cdot \ddot{T}(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t).$$

Розділимо ліву і праву частини отриманої рівності на вираз  $a^2 X(x)T(t)$ . Тоді маємо:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.5)$$

Зауважимо, і на цьому зробимо наголос, що рівність (3.5) має виконуватись при всіх значеннях  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . Внаслідок наведених дій змінні в рівності (3.5) розділились (звідси назва методу розділення змінних): ліва частина рівності залежить тільки від  $t$ , права частина – тільки від  $x$ .

Нагадаємо, що змінні  $x$  і  $t$  є незалежними одна від одної. Якщо, наприклад, зафіксувати деяке значення  $x = x_0$ , а  $t$  змінювати, то рівність (3.5) не порушується:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)}.$$

При фіксованому значенні  $x = x_0$  права частина рівності є деякою константою. Позначимо її через  $(-\lambda)$ . Знак "–" тут не має принципового значення, оскільки  $\lambda$  може бути як додатнім, так і від'ємним. Тоді для всіх  $t > 0$  маємо:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

а з урахуванням (3.5) маємо також:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отже, наслідком розділення змінних є рівність:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

що еквівалентно сукупності двох рівнянь:

$$\ddot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.7)$$

Відтепер замість рівняння (3.1) з частинними похідними маємо справу із звичайними диференціальними рівняннями (3.6) та (3.7), пов'язаними між собою лише спільним параметром розділення  $\lambda$ . Добуток довільного розв'язку рівняння (3.6) на довільний розв'язок рівняння (3.7) обов'язково буде розв'язком рівняння (3.1). В основній допоміжній задачі вимагається також, щоб цей розв'язок задовольняв крайові умови (3.2):

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0) \cdot T(t) = 0; \\ u(l, t) &= X(l) \cdot T(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

при всіх значеннях  $t > 0$ . Якщо покласти  $T(t) \equiv 0$ , то крайові умови (3.2) задовольняються, але при цьому розв'язок  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  дорівнює нулю тотожно, тобто розв'язок є тривіальним, що протирічить одній з умов основної допоміжної задачі. Отже, для того, щоб розв'язок був нетривіальним і одночасно щоб умови (3.2) виконувались, треба покласти:  $X(0) = 0$  і  $X(l) = 0$ .

Розглянемо тепер рівняння (3.7) разом з умовами, що накладаються на функцію  $X(x)$ :

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Ми прийшли до окремої задачі, так званої задачі на власні значення, або задачі Штурма-Ліувілля. Сформулюємо зміст цієї задачі:

***Знайти такі значення параметра  $\lambda$ , при яких існують нетривіальні розв'язки рівняння (3.9), що задовольняють умовам (3.10), а також знайти самі ці розв'язки.***

Зауважимо, що розв'язки рівняння (3.9) існують при будь-яких значеннях  $\lambda$ . Але розв'язки, що задовольняють умовам (3.10), існують лише при певних  $\lambda$ . Значення  $\lambda$ , при яких існують нетривіальні розв'язки (3.9)-(3.10), називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувілля, а самі розв'язки, що відповідають цим власним значенням – *власними функціями*.

Задача Штурма-Ліувілля є складовою частиною основної допоміжної задачі. Обов'язковими рисами задачі Штурма-Ліувілля є наявність параметра і додаткових умов, що накладаються на розв'язки диференціального рівняння.

Зосередимось тепер на розв'язанні задачі Штурма-Ліувілля (3.9)-(3.10). Для цього треба спочатку записати загальний розв'язок рівняння (3.9). Вигляд цього розв'язку залежить від того, чи є значення параметру  $\lambda$  додатнім, від'ємним чи воно дорівнює нулю. Розглянемо послідовно ці три випадки окремо.

**1. Нехай  $\lambda < 0$ .** Тоді загальний розв'язок рівняння (3.9) має вигляд:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|x}} + Be^{-\sqrt{|\lambda|x}}. \quad (3.11)$$

З'ясуємо, чи існують такі значення коефіцієнтів  $A$  і  $B$ , при яких розв'язок (3.11) задовольняє крайовим умовам (3.10). Зауважимо, що  $A$  і  $B$  не повинні одночасно дорівнювати нулю, оскільки при  $A = 0$  і  $B = 0$  розв'язок  $X(x) \equiv 0$  є тривіальним, що протирічить умові задачі Штурма-Ліувілля.

Отже, з крайових умов (3.10) маємо:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\sqrt{|\lambda|}l} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Маємо систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $A$  і  $B$ . Однорідна система (3.12) має нетривіальний розв'язок ( $A$  і  $B$  не дорівнюють нулю одночасно), якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}l} & e^{-\sqrt{|\lambda|}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|}l} - e^{\sqrt{|\lambda|}l}$$

дорівнює нулю. Безпосередньо з вигляду правої частини цієї рівності видно, що в даному випадку  $\Delta \neq 0$ , оскільки  $e^{-\sqrt{|\lambda|}l} < 1$ , а  $e^{\sqrt{|\lambda|}l} > 1$  за будь-яких значень  $\lambda < 0$ .

*Висновок: при  $\lambda < 0$  задача Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10) не має розв'язків, тобто при  $\lambda < 0$  не існує власних значень, а отже і відповідних їм власних функцій.*

**2. Нехай  $\lambda = 0$ .** Тоді рівняння (3.9) набуває вигляду

$$X''(x) = 0,$$

а його розв'язок є лінійною функцією  $x$ :

$$X(x) = Ax + B. \quad (3.13)$$

З умов (3.10) маємо:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ Al = 0. \end{cases}$$



Оскільки  $l \neq 0$ , то  $A = 0$  і  $B = 0$  одночасно; тобто, існує лише тривіальний розв'язок  $X(x) \equiv 0$ . Звідси висновок:  $\lambda = 0$  не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10).

Нарешті, розглянемо останній з можливих випадків.

**3. Нехай  $\lambda > 0$ .** Як і в двох попередніх випадках, запишемо загальний розв'язок рівняння (3.9):

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

і вимагаємо, щоб він задовольняв умови (3.10):

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Якщо покласти  $B = 0$ , то умови (3.10) задовольняться, але тоді  $A = 0$  і  $B = 0$  одночасно, тобто отримаємо тривіальний розв'язок  $X(x) \equiv 0$ , який не вважається за розв'язок задачі Штурма-Ліувілля.

На відміну від двох попередніх, в данному випадку є альтернатива: вважаємо, що  $B \neq 0$ , тоді

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Така рівність має місце, якщо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Від'ємні цілі значення  $n$  не беруться до уваги, оскільки  $\sqrt{\lambda}l$  – додатня величина.

З (3.15) випливає, що нетривіальні розв'язки задачі Штурма-Ліувілля існують лише при певних значеннях параметра  $\lambda$ . Кожному значенню  $n$  відповідає своє значення  $\lambda_n = (\pi n/l)^2$ . Кожному значенню  $\lambda_n$  відповідає функція

$$X_n(x) = \tilde{B}_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \Rightarrow X_n(x) = \tilde{B}_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

*Розв'язком задачі Штурма-Ліувілля називається сукупність всіх власних значень  $\lambda_n$  і відповідних власних функцій  $X_n(x)$ :*

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \tilde{B}_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \end{cases} \quad (3.16)$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\tilde{B}_n$  – довільна стала. Отже, задача Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10) має нескінченну, зліченну множину власних функцій і власних значень. Зауважимо, що всі власні значення задачі (3.9), (3.10) – додатні. В одному з

наступних розділів будуть сформульовані загальні умови за яких всі власні значення задачі Штурма-Ліувілля є додатними.

Оскільки розв'язок задачі Штурма-Ліувілля знайдено, то продовжуємо далі необхідні дії щодо розв'язання основної допоміжної задачі. Звертаємось тепер до рівняння (3.6). Нагадаємо, що (3.6) і (3.7) пов'язані спільним параметром  $\lambda$ . Тому, оскільки розв'язки задачі Штурма-Ліувілля існують лише за певних дискретних значень  $\lambda_n$ , то і рівняння (3.6) слід розв'язувати тільки при тих самих значеннях  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ , отже рівняння (3.6) треба переписати у вигляді:

$$\ddot{T}_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0,$$

або

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad (3.17)$$

де  $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$ . Індекс  $n$  у функції  $T_n(t)$  означає, що різним значенням  $\lambda_n$  відповідають різні функції  $T_n(t)$ .

Запишемо загальний розв'язок рівняння (3.17):

$$T_n(t) = C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t).$$

Тоді функції

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (3.18)$$

є частинними розв'язками основної допоміжної задачі. Тобто  $u_n(x, t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  є розв'язками рівняння (3.1), що задовольняють крайові умови (3.2) при довільних значеннях констант  $A_n = C_n \cdot \tilde{B}_n$ ,  $B_n = D_n \cdot \tilde{B}_n$ . Таким чином, основну допоміжну задачу розв'язано, оскільки (3.18) задовольняють всім вимогам даної задачі.

Оскільки рівняння (3.1) є лінійним, крайові умови (3.2) є лінійними та однорідними, то за принципом суперпозиції для лінійних задач, довільна лінійна комбінація частинних розв'язків  $u_n(x, t)$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (3.19)$$

також є розв'язком рівняння (3.1), що задовольняють крайові умови (3.2) при будь-яких значеннях констант  $A_n$  і  $B_n$ .

Виконаємо тепер останні дії для отримання розв'язку задачі (3.1)-(3.3) про вільні коливання обмеженої струни. Поставимо питання наступним чином: а чи не можна "підібрати" значення коефіцієнтів  $A_n$  і  $B_n$  в (3.19) такими, щоб функція  $u(x, t)$  у вигляді (3.19) задовольняла б і початковим умовам (3.3)?

Отже, коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$  повинні мати такі значення, щоб виконувались рівності:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (3.20)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (3.21)$$

За своїм математичним змістом (3.20) і (3.21) є розкладом заданих функцій  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  в ряд Фурє за синусами. Отже, для знаходження коефіцієнтів  $A_n$  і  $B_n$  можна скористатись відомими формулами для коефіцієнтів ряду Фур'є.

Але, в загальному випадку, власні функції задачі Штурма-Ліувілля  $X_n(x)$  не зводяться до тригонометричних функцій, і тоді розкладання в ряд за функціями  $X_n(x)$  називається розкладанням в узагальнений ряд Фур'є. Знайдемо значення коефіцієнтів  $A_n$  і  $B_n$  в (3.20) і (3.21) стандартним методом, який використовується при розкладанні функцій за власними функціями будь-якої задачі Штурма-Ліувілля.

Скористаємось тим, що функції  $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$  і  $X_m(x) = \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$  ортогональні між собою на відрізку  $x \in [0, l]$ , при  $m \neq n$ :

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx = \frac{l}{2} \delta_{nm}.$$

Домножимо ліву і праву частини рівності (3.20) на  $\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$  і проінтегруємо по  $x$  отримані вирази на відрізку  $[0, l]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{l}{2} \delta_{nm} = \frac{l}{2} A_m. \end{aligned}$$

Звідси:

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right) dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

Оскільки  $m$  і  $n$  пробігають одну і ту саму множину значень:  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ , то в (3.22) можна замінити  $m$  на  $n$ :

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx. \quad (3.23)$$

Використовуючи аналогічну процедуру по відношенню до рівняння (3.21) отримаємо:

$$\frac{l}{2}\omega_n B_n = \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx,$$

звідси:

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx. \quad (3.24)$$

Таким чином, всі коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$  визначені однозначно згідно (3.23) і (3.24) і, отже, функція (3.19) є єдиним розв'язком задачі (3.1)-(3.3) про вільні коливання обмеженої струни.

### 3.2 Фізична інтерпретація розв'язку задачі.

Отримання математичного виразу для розв'язку задачі математичної фізики дозволяє перейти до наступного етапу теоретичного дослідження фізичного процесу. Всебічний аналіз цього виразу дає можливість виявити властивості та характерні особливості, притаманні безпосередньо даному явищу, дозволяє надати йому якісне тлумачення та провести аналогії з іншими процесами та явищами.

Розглянемо окремий доданок в розв'язку (3.19) нашої задачі:

$$u_n(x, t) = \{A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t\} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (3.25)$$

та представимо його у вигляді:

$$u_n(x, t) = \alpha_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \cdot \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (3.26)$$

де  $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ,  $\delta_n = -\arctg \frac{B_n}{A_n}$ .

Вираз (3.26) має типовий вигляд функції, що описує *стоячі хвилі*. З нього випливає, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією і тією ж частотою  $\omega_n$ . Амплітуда коливань  $u_0 = |\alpha_n \sin(\pi n x/l)|$  залежить від координати  $x$ , отже, взагалі кажучи, різні точки струни коливаються з різними амплітудами.

Точки з координатами  $x_k = k \frac{l}{n}$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ), для яких  $\sin(\pi n x/l) = 0$ , залишаються нерухомими впродовж всього процесу, тобто амплітуда коливань даних точок дорівнює нулю. Такі точки називають *вузлами* стоячої хвилі.

Точки з координатами  $x_m = \frac{(2m+1)l}{2n}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), для яких  $|\sin(\pi n x/l)| = 1$ , коливаються з максимальною амплітудою, що дорівнює  $\alpha_n$ . Такі точки називають *пучностями* стоячої хвилі.

Відстань між двома сусідніми вузлами, так само, як відстань між двома сусідніми пучностями, дорівнює  $\Delta x = l/n$ , і кожна пучність знаходиться по середині між двома сусідніми вузлами. Фаза коливань точок струни залежить від знаку  $\sin(\pi nx/l)$ :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \omega_n t + \delta_n, & \text{якщо } \sin(\pi nx/l) > 0, \\ \omega_n t + \delta_n \pm \pi, & \text{якщо } \sin(\pi nx/l) < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Оскільки функція  $\sin(\pi nx/l)$  змінює знак ("+" на "-" або навпаки) лише у вузлах, то згідно (3.27) всі точки струни між сусідніми вузлами  $x_k, x_{k+1}$  коливаються у фазі: в процесі коливання вони одночасно проходять положення рівноваги і одночасно досягають (кожна точка свого) максимального відхилення від положення рівноваги.

Фази коливань точок, що розташовані по різні боки вузла, відрізняються, як видно з (3.27), на  $\Delta\varphi = \pm\pi$ , тобто такі точки коливаються у протифазі. Вони одночасно проходять положення рівноваги (з протилежними напрямками швидкостей) і одночасно досягають максимального відхилення (але по різні боки) від положення рівноваги. Профіль струни, що коливається за законом (3.25), в будь-який момент часу являє собою синусоїду:

$$u_n(x, t) = \gamma_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (3.28)$$

де  $\gamma_n(t) = \alpha_n \cdot \cos(\omega_n t + \delta_n)$ . Під час коливання відбувається періодичне перетворення потенціальної енергії струни в кінетичну і навпаки. В момент найбільшого відхилення струни від положення рівноваги кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна досягає свого найбільшого значення. Швидкості всіх точок струни в такий момент дорівнюють нулю.

При проходженні точок струни через положення рівноваги кінетична енергія досягає максимального значення, а потенціальна енергія стає мінімальною.

Знайдемо повну енергію струни, що коливається за законом (3.25). За нульовий рівень потенціальної енергії візьмемо її мінімальне значення. Тоді повна енергія коливань струни дорівнює максимальному значенню кінетичної енергії:  $E = E_k^{max}$ .

Кінетична енергія струни обчислюється як сума (інтеграл) кінетичних енергій окремих нескінченно-малих елементів струни

$$E_k = \int_0^l \rho \frac{v^2(x)}{2} dx,$$

де  $\rho$  – лінійна густина струни ( $\rho dx$  – маса елемента струни довжиною  $dx$ ).

Швидкість точок струни

$$v = \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\alpha_n \omega_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \sin(\omega_n t + \delta_n),$$

а максимальне значення швидкості (за абсолютною величиною) досягається в момент часу, коли  $|\sin(\omega_n t + \delta_n)| = 1$ . Тоді  $|v_{max}(x)| = \alpha_n \omega_n |\sin(\frac{\pi n}{l} x)|$ , а максимальне значення кінетичної енергії

$$\begin{aligned} E_k^{max} &= \int_0^l \rho \frac{v_{max}^2(x)}{2} dx = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{2} \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \\ &= \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{2} \frac{l}{2} = \frac{M \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} = \frac{M(A_n^2 + B_n^2) \omega_n^2}{4}, \end{aligned}$$

де  $M = \rho l$  – маса струни.

Таким чином, повна енергія коливань струни  $E = E_k^{max} = \frac{1}{4} M(A_n^2 + B_n^2) \omega_n^2$  пропорційна її масі, квадрату амплітуди та квадрату частоти.

Окрему стоячу хвилю з певною частотою  $\omega_n$  називають *гармонікою*. Отже, розв'язок у вигляді (3.19) задачі про коливання струни являє собою суперпозицію стоячих хвиль, або, інакше кажучи, суперпозицію гармонік. Частоти  $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$ , що відповідають окремим гармонікам, називаються *власними частотами* коливань струни. Оскільки параметр  $a$ , що входить в рівняння (3.1), дорівнює  $\sqrt{T/\rho}$ , то

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.29)$$

Колівання струни сприймається нами завдяки звуку, який видає струна у вигляді накладання простих *тонів*, що відповідають окремим стоячим хвилям. Висота тону залежить від частоти коливань, а сила тону визначається енергією стоячої хвилі, а отже, амплітудою коливань.

Згідно (3.29) самий низький тон, який може утворювати струна, відповідає найменшій з усіх можливих власних частот струни:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (3.30)$$

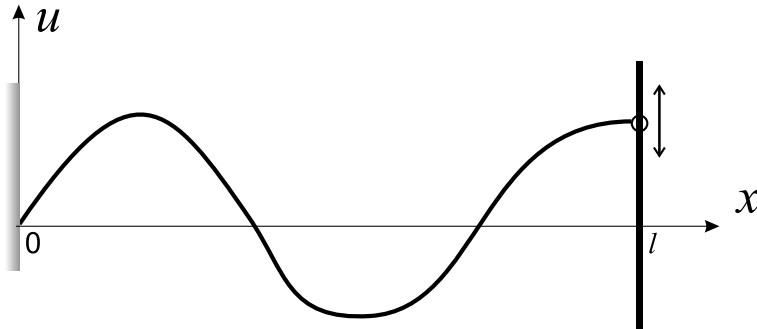
і називається *основним тоном* струни. Решта тонів, частоти яких є кратними  $\omega_1$ , називаються *обертонами*. Тембр звуку залежить від наявності, поряд з основним тоном, обертонів, а також від розподілу енергії по гармоніках. Як видно з (3.30), частота основного тону (а також обертонів) залежить від довжини струни, лінійної густини (або маси) та від сили натягу струни.

Наприкінці зауважимо, що задачі про вільні механічні коливання (повздовжні) в пружному стержні, коливання повітря в трубці, коливання струму і напруги в провідниках, або про електромагнітні коливання в резонаторах, абсолютно ідентичні щойно розглянутій задачі про поперечні коливання струни. Окремі фрагменти даної задачі повторюються у самих різноманітних задачах

теоретичної фізики. Зокрема, дискретні значення енергії, моменту кількості руху, тощо виникають в квантовій механіці як власні значення відповідних задач Штурма-Ліувілля.

### 3.3 Залежність розв'язку задачі про коливання струни від вибору крайових умов.

Змінимо тепер крайову умову на одному з кінців струни: вважаємо, що лівий кінець струни залишається закріпленим, а правий кінець – вільним. Слово "вільний" не слід тут розуміти буквально. Дійсно, для того, щоб струна могла коливатись, треба забезпечити натяг струни деякою силою  $T$ , що прикладена до кінця струни в *повздожньому* напрямку. Отже, "вільний" в даному випадку означає, що кінець струни може вільно зміщувати в *поперечному* по відношенню до нейтрального положення струни напрямку, і на кінець струни в поперечному напрямку не діє ніяка сила. Схему реалізації крайових умов такого типу вказано на рисунку:



лівий кінець струни ( $x = 0$ ) закріплений жорстко, а правий за допомогою кільця (масою якого нехтуємо), що може без тертя ковзати вздовж направляючого стержня у вертикальному напрямку. Математичне формулювання даної задачі відрізняється від (3.1)-(3.3) тільки однією крайовою умовою:  $u(l, t) = 0$  слід замінити на  $u_x(l, t) = 0$ , що призводить до заміни відповідної умови  $X(l) = 0$  на іншу умову  $X'(l) = 0$  в задачі Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10). Таким чином приходимо до наступної задачі Штурма-Ліувілля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Дотримуючись розглянутої вище схеми розв'язування задачі Штурма-Ліувілля, приходимо до висновку, що при  $\lambda < 0$  і  $\lambda = 0$  і в даному випадку не існує власних значень (а отже, і власних функцій). При  $\lambda > 0$  застосовуємо до загального розв'язку рівняння (3.9)

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

крайові умови  $X(0) = 0$ ,  $X'(l) = 0$  і приходимо до системи рівнянь відносно коефіцієнтів  $A$  і  $B$ :

$$\begin{cases} A = 0, \\ B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0. \end{cases}$$

Оскільки  $\lambda > 0$  і  $B \neq 0$  (розв'язок нетривіальний), то з другого рівняння системи маємо:  $\cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$  і звідси знаходимо власні значення і власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} \right)^2, \quad X_n(x) = \tilde{B}_n \sin \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} x \right), \quad (3.33)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Власні частоти струни  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n} \cdot a = \frac{\pi(2n+1)a}{2l}$  визначаються виглядом рівняння (3.17) з врахуванням нових значень  $\lambda_n$ .

Таким чином, розв'язок задачі про коливання струни у випадку, коли один (лівий) кінець струни закріплений, а другий (правий) вільний, має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} x \right), \quad (3.34)$$

де коефіцієнти ряду обчислюються за формулами:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} x \right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} x \right) dx.$$

Як і в попередньому випадку (кінці струни закріплені), розв'язок (3.33) являє собою суперпозицію стоячих хвиль або гармонік. Різниця полягає лише в розташуванні вузлів і пучностей, а також в значеннях власних частот струни.

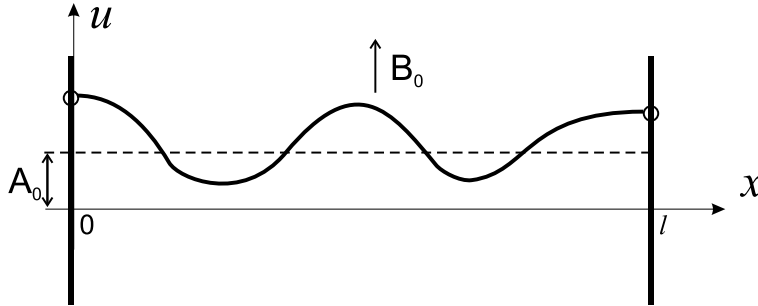
Згідно (3.33) вузли стоячої хвилі з власною частотою  $\omega_n$  розташовані в точках  $x_k = \frac{2k}{2n+1} \cdot l$ , ( $k = 0, 1 \dots n$ ), а пучності в точках  $x_m = \frac{2m+1}{2n+1} \cdot l$ , ( $m = 0, 1 \dots n$ ). Отже, при довільному значенні  $n$  на лівому кінці струни завжди буде вузол, а на правому – пучність. Найменша частота гармоніки, що задає тон звучання струни,  $\omega_0 = \frac{\pi a}{2l}$ . Оскільки параметр  $a$  має зміст швидкості поширення хвиль в струні, то частоті  $\omega_0$  відповідає довжина хвилі  $\tilde{\lambda}_0 = \frac{2\pi a}{\omega_0} = \frac{2\pi a}{\pi a/(2l)} = 4l$ . Отже, при коливанні з найменшою власною частотою  $\omega_0$  на довжині струни вкладається лише чверть довжини хвилі  $l = \tilde{\lambda}_0/4$ , в той час, як у випадку обох закріплених кінців – половина довжини хвилі. З рівності (3.33) випливає, що всі власні частоти струни кратні найменшій частоті

$$\omega_n = (2n+1)\omega_0,$$



і коефіцієнти кратності є цілими непарними числами.

Коротко обговоримо тепер специфіку задачі з крайовими умовами, що відповідають ситуації, коли обидва кінці струни вільні.



Повторюючи дії, розглянуті раніше, приходимо до задачі Штурма-Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Легко переконатись, що і в даному випадку не існує власних значень і власних функцій при  $\lambda < 0$ . Розв'язками задачі (3.35) є власні значення  $\lambda_n = (\pi n/l)^2$ , яким відповідають власні функції  $X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ .

На відміну від двох попередніх варіантів крайових умов, виявляється, що коли обидва кінці струни вільні, то  $\lambda = 0$  також є власним значенням. Дійсно, при  $\lambda = 0$  задача Штурма-Ліувілля має вигляд:

$$\begin{cases} X''(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння є лінійна функція  $X(x) = C + Dx$ , а з крайових умов випливає:  $X'(0) = D = 0$ ,  $X'(l) = D = 0$ . Отже, власному значенню  $\lambda = \lambda_0 = 0$  відповідає власна функція  $X_0(x) = C$ , яка не дорівнює тотожно нулю. При  $\lambda = 0$  рівняння (3.6) набуває вигляду  $\ddot{T} = 0$ , розв'язками якого є функція

$$T_0(t) = \tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 t.$$

Таким чином, розв'язок задачі про коливання обмеженої струни з вільними кінцями має вигляд

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad (3.36)$$

де коефіцієнти ряду обчислюються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

Власні частоти коливань струни  $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$ .

Пояснимо фізичний зміст перших двох доданків в правій частині (3.36). Припустимо, що початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю:  $\psi(x) \equiv 0$ . Якщо  $\int_0^l \varphi(x) dx \neq 0$ , то центр мас струни буде зміщений при  $t = 0$  у вертикальному напрямку на величину

$$\frac{\int_0^l \rho \varphi(x) dx}{\int_0^l \rho dx} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx = A_0.$$

Оскільки на струну з вільними кінцями в поперечному напрямку не діють зовнішні сили, то зміщення центру мас залишається постійним в часі і коливання струни відбуваються вже навколо зміщеного положення рівноваги, тобто, до зміщень, пов'язаних з коливаннями, буде додаватись постійне в часі зміщення  $A_0$ .

Припустимо тепер, що  $\psi(x) \neq 0$ . Тоді при  $t = 0$  імпульс центру мас струни дорівнює  $\frac{1}{l} \int_0^l \rho \psi(x) dx$  і, оскільки зовнішні сили (поперечні) відсутні, імпульс струни залишається незмінним, тобто на коливання струни накладається рівномірний рух струни в цілому зі швидкістю

$$v_0 = \frac{\int_0^l \rho \psi(x) dx}{\int_0^l \rho dx} = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx = B_0.$$

### 3.4 Коливання струни під дією зовнішніх сил.

В попередніх розділах розглянуто вільні коливання струни, тобто коливання спричинені початковими відхиленнями від положення рівноваги і початковими швидкостями точок струни у відсутності зовнішніх сил. Розглянемо тепер процес коливання обмеженої струни під дією сил, що розподілені по струні з деякою лінійною густиною  $F(x, t)$ . Вважаємо, що прикладені сили лежать в одній площині і мають напрям, нормальний до нейтрального положення струни. Зі змісту лінійної густини  $F(x, t)$  випливає, що на елемент струни довжиною  $dx$  діє зовнішня сила  $F(x, t) dx$ . За відсутності інших сил, даний елемент  $dx$ , маса якого  $dm = \rho dx$ , рухався б з прискоренням  $f(x, t) = \frac{F(x, t) dx}{dm} = \frac{F(x, t)}{\rho}$ . В дійсності, в процесі коливання струни, на кожний елемент струни діють також

сили з боку інших частин струни, і в результаті відбувається самоузгоджений рух усіх точок струни у відповідності до законів Ньютона.

Максимально спростимо задачу, щоб зосередитись безпосередньо на вивченні наслідків дії на струну саме зовнішніх сил.. Будемо вважати, що початкові відхилення від положення рівноваги і початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, тобто в момент часу  $t = 0$  струна знаходиться в стані спокою в своєму положенні рівноваги. Вважаємо також, що кінці струни жорстко закріплені, оскільки задачу про вільні коливання струни саме з такими крайовими умовами розглянуто найбільш докладно.

Математична постановка задачі про коливання обмеженої струни довжиною  $l$  під дією зовнішніх сил з врахуванням сформульованих крайових і початкових умов, набуває вигляду:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0; \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

На відміну від рівняння (3.1), що описує динаміку вільних коливань струни, диференціальне рівняння (3.37) є неоднорідним через наявність функції  $f(x, t)$ , зміст якої вже нами обговорено.

Розв'язок задачі (3.37-3.39) будемо шукати у вигляді ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (3.9),(3.10)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \quad (3.40)$$

Можливість такого розкладу обумовлена повнотою ортогональної послідовності власних функцій  $\left\{\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right\}$  в класі неперервних обмежених функцій, отже, довільну функцію  $u(x, t)$  (в даному випадку  $t$  слід розглядати як параметр) з цього класу можна розкласти в ряд (3.40), і цей ряд збігається рівномірно до функції  $u(x, t)$ .

Доцільність розкладу саме за функціями  $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$  випливає з того, що  $u(x, t)$  у вигляді ряду (3.40) автоматично забезпечує крайові умови (3.38), оскільки кожний з доданків в сумі (3.40) задовольняє ці умови. Останній фактор є вирішальним при виборі послідовності функцій, за якими розкладається  $u(x, t)$ . Якщо в задачі (3.37-3.39) крайові умови (3.38) замінити на інші, наприклад, на:  $u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0$  (тобто такі що відповідають ситуації, коли лівий кінець струни закріплений, а правий – вільний), то функцію

$u(x, t)$  слід розкласти за  $\left\{ \sin \left( \frac{\pi(2n+1)x}{2l} \right) \right\}$ , тобто за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля, що виникають в задачі про вільні коливання струни, з відповідними крайовими умовами.

Функцію  $f(x, t)$  з рівняння (3.37) також представимо у вигляді ряду

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right), \quad (3.41)$$

обґрунтовуючи таку можливість, як і для розкладу  $u(x, t)$ , повнотою послідовності функцій  $\left\{ \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right) \right\}$ . Коефіцієнти  $f_n(t)$  в (3.41) знаходимо так само, як і коефіцієнти  $A_n$  в (3.20):

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right) dx. \quad (3.42)$$

Диференціюючи почленно ряд (3.40) по  $x$  і по  $t$ , знайдемо частинні похідні функції  $u(x, t)$

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{u}_n(t) \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right),$$

$$u_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right)$$

і підставимо отримані вирази в рівняння (3.37). Після елементарних перетворень, маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t) \right\} \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right) = 0, \quad (3.43)$$

де  $\omega_n = \frac{\pi na}{l}$ .

Ліва частина рівності (3.43) є лінійною суперпозицією функцій  $\sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right)$  з коефіцієнтами  $C_n(t) = \ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t)$ , що залежать від параметра  $t$ .

Оскільки функції  $\sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right)$  з різними значеннями  $n$  є лінійно незалежними (бо ортогональні функції є лінійно незалежними завжди), то тотожна рівність нулю суми (3.43) можлива тоді і тільки тоді, коли кожний з коефіцієнтів  $C_n(t)$  дорівнює нулю. Звідси маємо:

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Підпорядковуючи функцію  $u(x, t)$  у вигляді розкладу (3.40) однорідним початковим умовам (3.39), отримаємо:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right) = 0$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = 0,$$

звідси, на підставі, знову ж таки, лінійної незалежності функцій  $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ , випливає:  $u_n(0) = 0$ ,  $\dot{u}_n(0) = 0$ . Таким чином, приходимо до задачі Коші відносно шуканої функції  $u_n(t)$ :

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t), \quad t > 0, \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} u_n(0) = 0, \\ \dot{u}_n(0) = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами (3.44), з початковими умовами (3.45) розв'яжемо, наприклад, операційним методом (можна також застосувати метод варіації довільних сталих, або метод функцій Гріна).

Введемо позначення для зображення Лапласа функцій  $u_n(x, t)$  та  $f_n(t)$ :

$$u_n(t) \doteq U_n(p), \quad f_n(t) \doteq F_n(p).$$

Тоді, з врахуванням початкових умов (3.45):  $\ddot{u}_n(t) \doteq p^2 U_n(p)$ , і перетворене рівняння набуває вигляду

$$p^2 U_n(p) + \omega_n^2 U_n(p) = F_n(p).$$

Звідси зображення Лапласа шуканої функції можна представити у вигляді

$$U_n(p) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\omega_n}{p^2 + \omega_n^2} F_n(p). \quad (3.46)$$

Оскільки  $U_n(p) \doteq u_n(t)$ ;  $\frac{\omega_n}{p^2 + \omega_n^2} \doteq \sin \omega_n t$ ;  $F_n(p) \doteq f_n(t)$ , то з (3.46) оберненим перетворенням Лапласа знаходимо:

$$u_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) f_n(\tau) d\tau. \quad (3.47)$$

Функцію  $u_n(t)$  представлено у вигляді згортки, оскільки її зображення Лапласа  $U_n(p)$  є добутком двох зображень.

Враховуючи (3.42), вираз (3.47) запишемо у вигляді:

$$u_n(t) = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^t \int_0^l \sin \omega_n(t - \tau) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) f(\xi \tau) d\tau d\xi. \quad (3.48)$$

Після підстановки виразу для  $u_n(t)$  в розклад (3.40) і зміни послідовності операцій підсумовування і інтегрування, запишемо остаточний вираз для

розв'язку задачі (3.37-3.39) про коливання обмеженої струни під впливом зовнішніх сил:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (3.49)$$

де

$$G(x, \xi; t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \sin \omega_n(t - \tau).$$

Функція  $G(x, \xi; t - \tau)$  має назву *функції впливу точкового джерела*, або *функції Гріна*. З'ясуємо фізичний зміст цієї функції.

Припустимо, що починаючи з моменту  $t = 0$ , протягом певного часу на струну не діють зовнішні сили, а потім в деякий момент  $t = t'$  до струни прикладається сила миттєвої дії в малому околі точки з координатою  $x'$ . Тоді відповідну лінійну густину розподілу сили  $F(x, t)$  можна змоделювати за допомогою  $\delta$ -функції Дірака:

$$F(x, t) = C \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (3.50)$$

де константа  $C$  має зміст імпульсу, що отримала струна під дією прикладеної до неї зовнішньої сили. Дійсно, імпульс сили з розподілом  $F(x, t)$  на довжині струни  $(0, l)$  за час від  $t = 0$  до  $t = \infty$  обчислюється за формулою:

$$P = \int_0^l \int_0^{\infty} F(x, t) dx dt = C \int_0^l \int_0^{\infty} \delta(x - x') \delta(t - t') dx dt = C.$$

Знайдемо відгук струни на зовнішню силу у формі (3.50), тобто отримаємо явний вигляд функції  $u(x, t)$  (3.49), що описує коливання струни під дією такої сили. Функція  $f(x, t)$  в (3.37) пов'язана з  $F(x, t)$  простим співвідношенням вигляду:

$$f(x, t) = \frac{P}{\rho} \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (3.51)$$

Підставимо цю функцію в підінтегральний вираз (3.49):

$$u(x, t) = \frac{P}{\rho} \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \delta(\xi - x') \delta(\tau - t') d\tau d\xi.$$

Оскільки  $x' \in (0, l)$ , то на підставі відомої властивості  $\delta$ -функції, в результаті інтегрування по  $\xi$  отримаємо

$$u(x, t) = \frac{P}{\rho} \int_0^t G(x, x', t - \tau) \delta(\tau - t') d\tau.$$

Якщо  $t < t'$ , то  $t' \notin (0, t)$  і, отже, інтеграл дорівнює нулю, оскільки  $\delta(\tau - t')$  дорівнює нулю на всьому проміжку інтегрування.

При  $t > t'$ ,  $t' \in (0, t)$  і тоді

$$\int_0^t G(x, x'; t - \tau) \delta(\tau - t') d\tau = G(x, x'; t - t').$$

Таким чином, коливання струни під впливом миттєвої точкової дії на струну силою (3.50), відображається функцією

$$\tilde{u}(x, x', t - t') = \begin{cases} 0, & t < t' \\ \frac{P}{\rho} G(x, x'; t - t'), & t > t'. \end{cases} \quad (3.52)$$

Рівність нулю функції  $u(x, t)$  при  $t < t'$  має просте пояснення: оскільки від початку відліку часу  $t = 0$  до моменту  $t = t'$  на струну не діяли зовнішні сили (нагадаємо, що початкові відхилення та початкові швидкості точок струни також дорівнюють нулю), то зрозуміло, що до початку дії зовнішніх сил струна залишається в стані спокою.

Якщо  $P/\rho = 1$  (в певних одиницях виміру), то коефіцієнт при  $\delta$ -функціях в (3.51) дорівнює одиниці, і відповідний коефіцієнт в (3.52) при функції Гріна також дорівнює одиниці.

Отже, вираз (3.52) дозволяє надати функції впливу точкового джерела певне фізичне тлумачення, а саме: функція  $G(x, x'; t - t')$  описує при  $t > t'$  коливання струни, якщо в момент часу  $t = t'$  на струну подіяли миттєвою точковою силою, яка передає струні імпульс  $P$ , числове значення якого дорівнює лінійній густині струни  $\rho$ .

Пояснимо тепер, чому розв'язок задачі (3.37-3.39) представляється через функцію Гріна саме у вигляді інтегралу (3.49). Функцію  $f(x, t)$  в рівнянні (3.37) можна розглядати як лінійну комбінацію функцій миттєвої точкової дії типу (3.51):

$$f(x, t) = \int_0^l \int_0^\infty f(\xi, \tau) \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) d\xi d\tau, \quad (3.53)$$

(інтеграл можна вважати за суму, де індекс підсумовування пробігає неперервний ряд значень). Відгук струни на окремий доданок

$$f(\xi, \tau) \delta(x - \xi) \delta(t - \tau), \quad (3.54)$$

описується, згідно (3.52), функцією:

$$\tilde{u}(x, \xi; t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(\xi, \tau) G(x, \xi; t - \tau), & t > \tau. \end{cases} \quad (3.55)$$

Оскільки задача (3.37-3.39) є лінійною, то згідно принципу суперпозиції для лінійних систем, відгук струни на функцію  $f(x, t)$  дорівнює сумі (інтегралу)

відгуків на окремі доданки (3.54):

$$u(x, t) = \int_0^l \int_0^\infty \tilde{u}(x, \xi; t - \tau) d\xi d\tau.$$

Після підстановки виразу (3.55) в праву частину даної рівності, з врахуванням того, що при  $t > \tau$   $\tilde{u}(x, \xi; t - \tau) \equiv 0$ , остаточно отримуємо розв'язок:

$$u(x, t) = \int_0^l \int_0^t G(x, \xi; t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

який повністю співпадає з (3.49).

Зауважимо, що обмеження інтегрування по змінній  $\tau$  в (3.49) інтервалом  $(0, t)$  є проявом так званого фізичного принципу причинності: на стан струни в момент часу  $t$  не можуть впливати сили, що діють при  $\tau > t$ .

### 3.5 Загальна перша крайова задача

Розглянемо задачу про коливання обмеженої струни у загальному випадку, коли початкові відхилення від положення рівноваги і початкові швидкості точок струни відмінні від нуля, кінці струни примусово рухаються за заданими законом, і на струну діє змінна у часі зовнішня, розподілена по струні, сила. Математична постановка такої задачі складається з неоднорідного хвильового рівняння та неоднорідних крайових і початкових умов.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.56)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t); \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.58)$$

Функції  $f(x, t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $\phi(x)$  і  $\psi(x)$  в заданій задачі вважаються відомими.

Для розв'язання задачі (3.56)-(3.58) застосуємо метод редукції, типовий для лінійних задач, суть якого полягає в зведенні складної задачі до деякої сукупності простіших задач, методи розв'язання яких відомі.

Першим кроком на цьому шляху є зведення (3.56)-(3.58) до задачі з однорідними крайовими умовами. Функцію  $u(x, t)$  представимо у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + W(x, t), \quad (3.59)$$

де  $v(x, t)$  вважаємо за нову шукану функцію (замість  $u(x, t)$ ), а в якості  $W(x, t)$  оберемо будь-яку функцію (бажано просту), яка візьме на себе крайові умови



(3.57), наприклад

$$W(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_1(t) + \frac{x}{l} \mu_2(t).$$

Безпосередньо з вигляду  $W(x, t)$  випливає:

$$W(0, t) = \mu_1(t), \quad W(l, t) = \mu_2(t).$$

Тоді маємо:

$$v(0, t) = u(0, t) - W(0, t) = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0,$$

$$v(l, t) = u(l, t) - W(l, t) = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0,$$

тобто  $v(x, t)$  задовольняє *однорідні* крайові умови. Підставимо в (3.56)-(3.58) замість  $u(x, t)$  праву частину (3.59) і переформулюємо задачу вже відносно нової шуканої функції  $v(x, t)$ :

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v(l, t) = 0; \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = \tilde{\phi}(x), \\ v_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \end{cases} \quad (3.62)$$

де  $\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - W_{tt}(x, t)$  (тут враховано, що  $W_{xx} \equiv 0$ ),  $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - W(x, 0)$ ,  $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - W_t(x, 0)$ . Отже, задача (3.60)-(3.62), на відміну від (3.56)-(3.58), має суттєву позитивну якість: крайові умови даної задачі є однорідними, що дозволяє застосувати до неї метод розділення змінних.

Наступним кроком є розділення задачі (3.60)-(3.62) на дві вже відомі задачі (метод їх розв'язання описано вище): на задачу з однорідним рівнянням і неоднорідними початковими умовами:

$$v_{tt}^{(1)} = a^2 v_{xx}^{(1)}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} v^{(1)}(0, t) = 0, \\ v^{(1)}(l, t) = 0; \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\begin{cases} v^{(1)}(x, 0) = \tilde{\phi}(x), \\ v_t^{(1)}(x, 0) = \tilde{\psi}(x) \end{cases} \quad (3.65)$$

і задачу з неоднорідним рівнянням і однорідними початковими умовами:

$$v_{tt}^{(2)} = a^2 v_{xx}^{(2)} + \tilde{f}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.66)$$

$$\begin{cases} v^{(2)}(0, t) = 0, \\ v^{(2)}(l, t) = 0; \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\begin{cases} v^{(2)}(x, 0) = 0, \\ v_t^{(2)}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Почленно додавши рядки задачі (3.66)-(3.68) до відповідних рядків задачі (3.63)-(3.65), переконаємось, що функція

$$v(x, t) = v^{(1)}(x, t) + v^{(2)}(x, t)$$

задовольняє як рівняння, так і додаткові умови задачі (3.60)-(3.62), тобто  $v(x, t)$  є розв'язком даної задачі.

Таким чином, послідовно розв'язавши задачі (3.63)-(3.65) і (3.66)-(3.68) методом розділення змінних, можемо записати розв'язок загальної задачі (3.56)-(3.58):

$$u(x, t) = v^{(1)}(x, t) + v^{(2)}(x, t) + W(x, t). \quad (3.69)$$

На перший погляд може здатися, що розв'язок  $u(x, t)$  є неоднозначним, оскільки неоднозначним є вибір функції  $W(x, t)$ . Насправді це не так. При виборі іншої функції  $W(x, t)$ , яка задовольняє ті самі крайові умови (3.57), функції  $\tilde{f}(x, t)$ ,  $\tilde{\phi}(x)$  і  $\tilde{\psi}(x)$  також змінюються, а отже змінюються і функції  $v^{(1)}(x, t)$ ,  $v^{(2)}(x, t)$ , і саме таким чином, що сума (3.69), тобто функція  $u(x, t)$ , залишається незмінною.

Розв'язок задачі (3.56)-(3.58) є однозначним, тобто він не залежить ні від вибору функції  $W(x, t)$ , ні, від методу розв'язання задачі взагалі. Припустимо, що задача (3.56)-(3.58) має два різні розв'язки:  $u^{(I)}(x, t)$  і  $u^{(II)}(x, t)$ . Тоді функція  $Z(x, t) = u^{(I)}(x, t) - u^{(II)}(x, t)$  буде розв'язком задачі з однорідним рівнянням і однорідними крайовими і початковими умовами:

$$Z_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3.70)$$

$$\begin{cases} Z(0, t) = 0, \\ Z(l, t) = 0; \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\begin{cases} Z(x, 0) = 0, \\ Z_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.72)$$

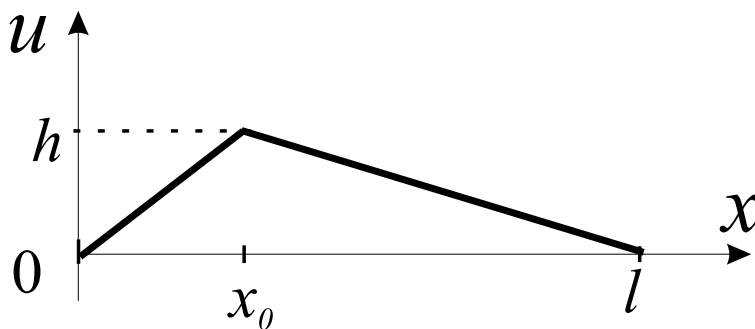
Така задача описує ситуацію, коли на струну не діють зовнішні сили, кінці струни жорстко закріплені, а початкові відхилення від положення рівноваги і початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю. Не застосовуючи строгого математичного методу доведення, а беручи до уваги лише фізичні міркування, можна стверджувати, що існує лише тривіальний розв'язок задачі (3.70)-(3.72):  $Z(x, t) \equiv 0$ , оскільки за наведених умов не існує жодних факторів, які можуть вивести струну зі стану спокою.

Отже, маємо:  $Z(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u^{(I)}(x, t) - u^{(II)}(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u^{(I)}(x, t) \equiv u^{(II)}(x, t)$ , тобто існує лише один розв'язок задачі (3.56)-(3.58).

### 3.6 Питання та завдання до розділу Метод розділення змінних

1. Сформулюйте математичну постановку і фізичну суть задачі про вільні коливання обмеженої струни з закріпленими кінцями.
2. Сформулюйте основну допоміжну задачу.
3. Поясніть, яким чином в методі розділення змінних з'являється параметр розділення  $\lambda$ .
4. Сформулюйте зміст задачі Штурма-Ліувілля. Дайте означення поняття "власні функції" і "власні значення" задачі Штурма-Ліувілля.
5. Яка властивість власних функцій задачі Штурма-Ліувілля використовується при знаходженні коефіцієнтів  $A_n$  і  $B_n$  в розв'язку задачі?
6. Поясніть зміст принципу суперпозиції. До яких систем він застосовується?
7. Який фізичний зміст мають окремі гармоніки в розв'язку  $u(x, t)$ ? Чому дорівнює енергія окремої гармоніки? Як співвідносяться фази коливань точок, що знаходяться по різні боки від вузла в окремій гармоніці?
8. Від яких характеристик струни залежать власні частоти коливань струни? Поясніть поняття "основний тон" і "обертони".
9. Сформулюйте математичну постановку задачі про вільні коливання струни, кінці якої вільні.
10. Сформулюйте задачу про коливання обмеженої струни під дією змінних в часі зовнішніх сил.
11. Яким чином універсальний принцип причинності проявляється в розв'язку даної задачі? Який фізичний зміст має функція миттєвого точкового джерела?
12. Сформулюйте і поясніть послідовність розв'язання загальної першої крайової задачі.
13. Що розуміють під виразом "метод редукції" розв'язання задачі?

**3.1.** Знайти закон вільних коливань струни на відрізку  $x \in [0, l]$ , якщо кінці струни жорстко закріплені, початкова швидкість дорівнює нулю, початкове зміщення (а) має форму, зображену на рисунку; (б) описується формулою  $u(x, 0) = \frac{l}{100} \sin(\pi x/l)$ .



- 3.2.** Струна довжиною  $l$  з жорстко закріпленими кінцями збуджується в початковий момент часу ударом плоского молоточка, що надає швидкість  $v_0$  точкам струни на відрізку  $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < l$ . Знайти відхилення струни від положення рівноваги, якщо початкове зміщення дорівнює нулю.
- 3.3.** Розв'язати задачу про коливання струни довжиною  $l$  із закріпленими кінцями, що збуджується ударом тоненького молоточка в точці  $x = x_0$ , що передає струні імпульс  $I$ . Початкова швидкість дорівнює нулю.
- 3.4.** Розв'язати задачу про повздовжні коливання в пружному стержні довжиною  $l$  з вільними кінцями, якщо початкові зміщення і початкові швидкості в повздовжньому напрямку довільні. Врахувати можливість рівномірного поступального руху стержня.
- 3.5.** Розв'язати задачу про повздовжні коливання стержня довжиною  $l$  при початкових умовах  $u(x, 0) = kx$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ , якщо кінець  $x = 0$  закріплений, а кінець  $x = l$  вільний.
- 3.6.** Знайти повздовжні зміщення точок стержня, якщо кінець  $x = 0$  закріплений пружно, а кінець  $x = l$  вільний. Пружне закріплення означає, що на кінець діє повздовжня сила, пропорційна зміщенню і направлена в протилежному напрямку.
- 3.7.** До стелі ліфта, що рівномірно рухається із швидкістю  $v_0$ , жорстко закріплений стержень кінцем  $x = 0$ , при цьому кінець  $x = l$  вільний. Знайти повздовжні коливання стержня після миттєвої зупинки ліфта. Положення стержня – вертикальне
- 3.8.** Знайти відхилення від положення рівноваги прямокутної мембрани із сторонами  $x_1, y_1$ , якщо краї мембрани жорстко закріплені. Початкові умови – довільні:  $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ ,  $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$ .
- 3.9.** Розв'язати задачу про коливання мембрани, що має форму рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами рівними  $l$ . Краї мембрани закріплені. Початкові умови – довільні:  $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ ,  $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$ .
- 3.10.** Розв'язати задачу  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sin(kx)$  для  $t > 0$ ,  $x \in [0, l]$  із нульовими початковими і крайовими умовами.
- 3.11.** Знайти коливання струни довжиною  $l$  під дією зовнішньої сили з лінійною густиною  $F(x) = f_0 x(l - x)t^2$ . Відхилення і швидкості точок струни в початковий момент часу дорівнюють нулю.

## Рівняння параболічного типу.

### Приклад 3

Розв'язати крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad x \in (0, l), t > 0.$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді:  $u(x, t) = e^{-\beta t} v(x, t)$ . Підставивши цей вираз в рівняння а також в початкові і крайові умови, отримаємо для функції  $v(x, t)$  однорідну крайову задачу:

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

$$v(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad x \in (0, l), t > 0.$$

Будемо розв'язувати цю задачу методом розділення змінних, представляючи розв'язок у вигляді  $v(x, t) = X(x)T(t)$ .

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

де  $\lambda$  – параметр розділення.

Для функції  $X(x)$  використовуючи крайові умови, отримаємо задачу Штурма-Ліувіля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \tag{3.73}$$

$$X(0) = 0; \quad X'(l) = 0, \tag{3.74}$$

Отримана задача повністю співпадає з розв'язаною раніше задачею (3.31), (3.32). Одже одразу знаходимо, що власні значення задачі мають вигляд:  $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2$ , а власні функції, відповідно,  $X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l}$ .

Розв'яжемо тепер рівняння для функції  $T(t)$ :

$$\dot{T}_n(t) = -a^2 \lambda_n T_n(t) \Rightarrow T_n(t) = C_n e^{-\gamma_n t}, \quad \gamma_n = \frac{a^2(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2}.$$

Загальний розв'язок крайової задачі має вигляд:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n t} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l} \tag{3.75}$$

Коефіцієнти  $B_n$  знаходимо, накладаючи початкову умову:

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l} = \sin \frac{\pi x}{2l} \Rightarrow B_k = 0, k \neq 0, B_0 = 1.$$

Остаточно маємо відповідь:

$$u(x, t) = e^{-\beta t} v(x, t) = e^{-\beta t - \frac{\pi^2 a^2}{4l^2} t} \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

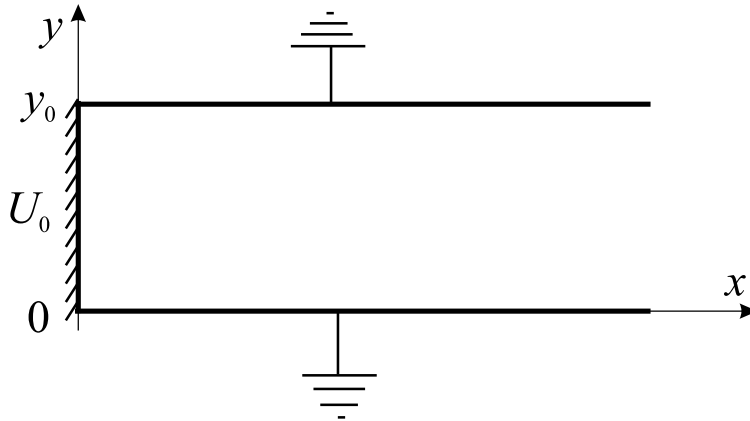
- 3.12.** Знайти розподіл температури всередині тонкого стержня  $x \in [0, l]$  із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо
- (а) температура його кінців підтримується рівною нулю;
  - (б) температура кінця  $x = 0$  підтримується рівною нулю, а кінець  $x = l$  – теплоізолюваний;
  - (в) обидва кінці стержня теплоізолювані. Початкова температура  $u(x, 0) = f(x)$ . Розглянути випадок  $f(x) = u_0 = \text{const}$ .
- 3.13.** Знайти розподіл температури всередині тонкого стержня  $x \in [0, l]$  із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо температура кінця  $x = 0$  підтримується рівною нулю, а на кінці  $x = l$  температура змінюється за законом  $u(l, t) = Ae^{-\gamma t}$ . Початкова температура всередині стержня:  $u(x, 0) = Ax/l$ .
- 3.14.** Знайти температуру в тонкому однорідному кільці довжиною  $l$ , якщо бічна поверхня кільця теплоізолювана, а початковий розподіл температури в кільці довільний:  $u(x, 0) = f(x)$
- 3.15.** Визначити критичну товщину шару, в якому відбувається дифузія частинок із розмноженням.
- (а) Концентрація частинок на верхній і нижній поверхні нульова.
  - (б) Потік частинок через нижню поверхню шару дорівнює нулю, а на верхній поверхні концентрація нульова. Початковий розподіл концентрації всередині шару – довільний.
- 3.16.** Визначити критичні розміри кубу, якщо всередині відбувається дифузія частинок із розмноженням. Концентрація частинок на поверхні нульова. Початковий розподіл концентрації  $u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$ .
- 3.17.** Визначити критичні розміри кулі, якщо всередині відбувається дифузія частинок із розмноженням. Концентрація частинок на поверхні нульова. Початковий розподіл частинок залежить лише від відстані до центру кулі:  $u(r, 0) = f(r)$ .

- 3.18.** Розв'язати задачу про охолодження кулі радіусу  $r_0$ , якщо в початковий момент часу розподіл температури залежав лише від відстані до центру кулі:  $u(r, 0) = f(r)$ .
- (а) На поверхні кулі підтримується нульова температура;  
 (б) Поверхня кулі підтримуються при сталій температурі  $u_0 = \text{const}$ ;  
 (в) Поверхня кулі вільно охолоджується за законом Ньютона в середовищі з нульовою температурою.
- 3.19.** Бічна поверхня кулі радіусу  $r_0$  опромінюється однорідним потоком тепла густиною  $q$ . Знайти температуру всередині кулі при  $t > 0$ , якщо в початковий момент часу температура кулі дорівнювала нулю.

## Рівняння еліптичного типу.

### Приклад 4

Знайти електростатичний потенціал всередині області між провідними пластинами  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y_0$ , якщо пластина  $x = 0$  має потенціал  $u(0, y) = U_0 = A(y_0 - y)y/y_0^2$  а пластини  $y = 0$  та  $y = y_0$  заземлені (див. рисунок). Всередині області відсутні вільні заряди.



Крайова задача для електростатичного потенціалу  $u(x, y)$  має вигляд:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(0, y) = A(y_0 - y)y/y_0^2, u(\infty, y) = 0, u(x, 0) = u(x, y_0) = 0, x \in (0, \infty), y \in (0, y_0).$$

Після розділення змінних отримаємо:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Для функції  $Y(y)$  отримаємо задачу Штурма-Ліувілля, аналогічну до розглянутої в Прикладі 2. Тому можна одразу написати власні функції і власні значення цієї задачі:  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ ,  $Y_n(y) = A_n \sin(\pi n y / y_0)$ . Відповідне рівняння для  $X(x)$  має вигляд:

$$X_n''(x) - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n(x) = 0,$$

Загальний розв'язок цього рівняння:  $X_n(x) = B_n e^{-\pi n x / y_0} + C_n e^{\pi n x / y_0}$ . Із крайової умови при  $x \rightarrow \infty$  можна визначити одну з констант:  $X_n(\infty) = 0 \Rightarrow C_n = 0$ .

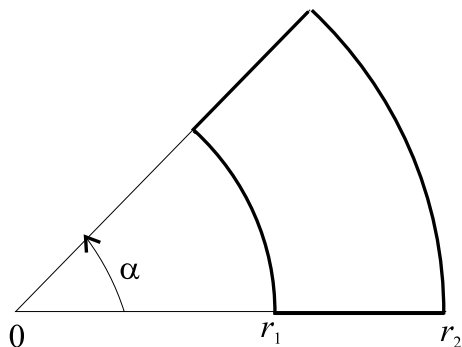
Таким чином, маємо загальний розв'язок:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi n x / y_0} \sin\left(\frac{\pi n y}{l}\right). \quad (3.76)$$

Накладаючи умову  $u(0, y) = U_0$  і використовуючи результати задачі Прикладу 2, остаточно отримуємо:

$$u(x, y) = \frac{8A}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} e^{-(2m+1)\pi x / y_0} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{l}.$$

- 3.20.** Знайти електростатичний потенціал всередині паралелепіпеду із провідними бічними гранями, якщо одна грань має потенціал  $u_0 = \text{const}$ , а всі інші грані заземлені.
- 3.21.** Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного циліндру радіусу  $r_0$ , якщо половина циліндра  $\varphi \in [0, \pi]$  має температуру поверхні, рівну  $U_1$ , а друга половина – температуру  $U_2$ .
- 3.22.** Знайти стаціонарний розподіл температури всередині кільцевого сектора  $r_1 < r < r_2$ ,  $0 < \varphi < \alpha$ , якщо температура на границях задається рівностями:  $u(r, 0) = u(r, \alpha) = u(r_1, \varphi) = 0$ ,  $u(r_2, \varphi) = f(\varphi)$ .





- 3.23.** Знайти потенціал зовні нескінченного провідного заземленого циліндру радіусу  $r_0$ , що знаходиться в однорідному електричному полі  $\vec{E}_0$ , направлено перпендикулярно до осі циліндру. Визначити поверхневу густину зарядів на циліндрі.
- 3.24.** Нескінчений провідний циліндр знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі  $\vec{E}_0$ , направлено вздовж осі  $x$ . Твірна циліндру паралельна осі  $z$ . Знайти густину поверхневого заряду на циліндрі.
- 3.25.** Знайти стаціонарний розподіл температури в твердому тілі, що обмежене нескінченними коаксіальними циліндричними поверхнями із радіусами  $r_1$  і  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), якщо на поверхні внутрішнього циліндру підтримується постійна температура  $u_0$ . Половина  $0 \leq \varphi \leq \pi$  зовнішнього циліндру підтримується при нульовій температурі, а інша половина  $\pi < \varphi \leq 2\pi$  — при температурі  $u_0$ .

#### 4. Задачі з використанням $\delta$ -функцій.

- 4.1.** Записати об'ємну густину заряду в декартовій, циліндричній або сферичній системі координат для випадку, коли заряд рівномірно розподілений по поверхням або вздовж ліній:
- (а) Для кулі радіусу  $R$  із поверхневою густиною  $\sigma$ .
  - (б) Для півкулі радіусу  $R$  із поверхневою густиною  $\sigma$ .
  - (в) Тонке кільце радіусу  $R$ , що знаходиться в площині  $(x, y)$ . Лінійна густина заряду  $\gamma$ .
  - (г) Напівкільце радіусу  $R$ , лінійна густина заряду  $\gamma$ .
  - (д) Тонкий стержень довжиною  $l$ , що розташований вздовж додатньої частини осі  $z$ . Лінійна густина заряду  $\gamma$ .
  - (е) Тонкий диск радіусу  $R$ , що лежить в площині  $(x, y)$ , заряджений з поверхневою густиною  $\sigma$ .
  - (ж) Циліндрична поверхня радіусу  $R$  і висотою  $h$ , заряджена з поверхневою густиною  $\sigma$ . Основа циліндру розташована в площині  $(x, y)$ .

- 4.2.** Довести рівності:

$$(a) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \delta(x); \quad (b) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \frac{x^2 \varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} = \delta(x)$$

$$(в) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \frac{x\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} = -\frac{d\delta(x)}{dx}; \quad (д) x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x);$$

$$(е) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nx)}{\pi nx^2} = \delta(x); \quad (ж) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \delta(x)$$

4.3. Довести, що для будь-якої гладкої функції  $f(x)$  має місце рівність:

$$f(x) \frac{d\delta(x-a)}{dx} = f(a) \frac{d\delta(x-a)}{dx} - \delta(x-a) \frac{df(x)}{dx}$$

4.4. Довести, що якщо  $f'(a_n) \neq 0$ , де  $\{a_n\}$  – множина нулів функції  $f(x)$ :  $f(a_n) = 0$ , то

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - a_n)}{|f'(a_n)|}$$

## 5. Метод розділення змінних з використанням спеціальних функцій.

Задачі з використанням циліндричних функцій.

5.1. Знайти вираз для електростатичного потенціалу всередині циліндру радіусу  $r_0$  та висотою  $h$ , якщо бічна поверхня і верхня основа заземлені, а нижня основа має постійний потенціал  $u_0$ .

5.2. Температура нижньої основи і бічної поверхні циліндру дорівнює нулю. Радіус циліндру  $r_0$ , висота дорівнює  $h$ . Знайти стаціонарний розподіл температури всередині циліндру. Якщо температура верхньої основи (а) має аксіально-симетричний розподіл:  $u(r, h) = f(r)$ ; (б) має розподіл, що задається формулою:  $u(r, \varphi, h) = f(r, \varphi)$ .

5.3. Знайти критичний радіус нескінченно довгого циліндру, в якому відбувається дифузія частинок з розмноженням. Концентрація частинок на поверхні циліндру дорівнює нулю.

5.4. Розв'язати задачу про поперечні коливання мембрани, що має форму кола. Край мембрани закріплений. Початковий розподіл швидкостей і зміщень є радіально-симетричним.

5.5. (а) Довести

$$g(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n, \quad \text{де } J_n(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}.$$

(б) Розглянувши добуток твірних функцій  $g(x, t)g(-x, t)$ , довести що

$$1 = J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n^2(x), \quad |J_0(x)| \leq 1; \quad |J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(в) Використовуючи властивості твірних функцій  $g(x+y, t) = g(x, t)g(y, t)$ , довести

$$J_n(x+y) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x)J_{n-s}(y).$$

**5.6.** Знайти електростатичний потенціал всередині циліндричної коробки радіусу  $r_0$  висотою  $h$ , якщо верхня і нижня основа заземлені, а бічна поверхня заряджена до потенціалу  $u_0$ . Визначити напруженість поля на осі циліндру.

**Задачі з використанням поліномів Лежандра і сферичних функцій.**

**5.7.** Знайти електростатичне поле точкового заряду  $q$  в присутності провідної заземленої кулі радіусу  $r_0$

(а) заряд знаходиться на відстані  $a > r_0$  від центру кулі, знайти потенціал зовні кулі;

(б) заряд знаходиться на відстані  $a < r_0$  від центру кулі, знайти потенціал всередині кулі.

**5.8.** Знайти потенціал в області між двома концентричними провідними заземленими кулями ( $r_1 < r < r_2$ , де  $r_1, r_2$  – радіуси куль), якщо на відстані  $a$  ( $r_1 < a < r_2$ ) розташований точковий заряд  $q$ .

**5.9.** Сферична посудина з твердими стінками, наповнена газом, тривалий час рухалась рівномірно із швидкістю  $v_0$ . В момент часу  $t = 0$  вона миттєво зупинилась і залишалась нерухомою. Знайти коливання, що встановились всередині посудини.

**5.10.** Тверда куля рухається з постійною швидкістю  $v_0$  в нестисливій рідині, що знаходиться у спокої на далеких відстанях від кулі. Радіус кулі  $r_0$ . Знайти потенціал швидкостей рідини.

**5.11.** Знайти електростатичний потенціал зовні провідної заземленої кулі радіусу  $r_0$ , що знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі  $\vec{E}_0$ .

**5.12.** Обчислити  $P_n(0)$ ,  $P_n(1)$ .

**5.13.** Обчислити

$$(a) \int_0^1 x P_n(x) dx;$$

$$(б) \int_0^1 P_n(x) dx.$$

**5.14.** Знайти стаціонарний розподіл температури всередині півкулі радіусу  $r_0$ , якщо сферична частина поверхні півкулі підтримується при сталій температурі  $u_0$ , а основа має нульову температуру.

**5.15.** Знайти гармонійну функцію всередині кулі радіусу  $r_0$ , що набуває на поверхні значення:  $u(r_0, \theta) = \cos^2 \theta$ .

**5.16.** Розв'язати задачу про охолодження кулі радіусу  $r_0$ , якщо початковий розподіл температури заданий:  $u(r, \theta, \varphi, 0) = f(r, \theta, \varphi)$ .

(a) На поверхні кулі підтримується нульова температура.

(б) На поверхні кулі підтримується стала температура  $u_0$ .

(в) Поверхня кулі вільно охолоджується в середовищі із нульовою температурою.

**5.17.** Знайти температуру всередині сферичної оболонки між двома концентричними сферичними поверхнями ( $r_1 < r < r_2$ ). Початковий розподіл температури заданий:  $u(r, \theta, \varphi, 0) = f(r, \theta, \varphi)$ .

(a) Температура на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки підтримується рівною нулю.

(б) Зовнішня поверхня охолоджується в середовищі з нульовою температурою, а внутрішня поверхня опромінюється рівномірним потоком тепла з густиною  $Q$ .

**5.18.** Розкласти плоску хвилю  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$  по поліномам Лежандра і функціям Бесселя.

**5.19.** Розв'язати задачу про розсіяння плоскої акустичної хвилі на твердому циліндрі радіусу  $r_0$ . Твірна циліндру паралельна хвильовій поверхні плоскої хвилі.

**5.20.** Розв'язати задачу про розсіяння плоскої акустичної хвилі на твердій кулі радіусу  $r_0$ .

## 6. Інтегральні рівняння.

6.1. Розв'язати інтегральне рівняння методом послідовних наближень:

$$(a) \varphi(x) = 1 - 2 \int_0^x t\varphi(t)dt;$$

$$(б) \varphi(x) = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt.$$

6.2. Розв'язати інтегральне рівняння з виродженим ядром:

$$(a) \varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt; \quad (б) \varphi(x) = -x^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-t^2}\varphi(t)dt;$$

$$(в) \varphi(x) = -x^2 + \int_{-1}^1 x^2t^2\varphi(t)dt; \quad (г) \varphi(x) = x^3 + \lambda \int_0^1 (1+x^2t^2)\varphi(t)dt;$$

$$(д) \varphi(x) = e^x + 2\lambda \int_0^1 e^{x+t}\varphi(t)dt; \quad (e) \varphi(x) = e^x + \lambda \int_0^1 e^{x-t}(1+xt)\varphi(t)dt;$$

$$(ж) \varphi(x) = x^2 + x^4 + \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\varphi(t)dt.$$

6.3. Розв'язати інтегральні рівняння:

$$(a) \varphi(x) = \pi - 2x + \lambda \int_0^\pi \sin(2x+t)\varphi(t)dt;$$

$$(б) \varphi(x) = \cos 3x + \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + \cos 2x \cos 2t)\varphi(t)dt;$$

$$(в) \varphi(x) = \cos x + \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t + 2 \sin 2x \sin 2t)\varphi(t)dt.$$

6.4. Розв'язати інтегральне рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt + a \sin x + b$$

для всіх  $\lambda$ , та всіх значень параметрів  $a, b$ .

6.5. Знайти всі значення параметрів  $a, b, c$ , при яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c + \lambda \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\varphi(t)dt$$

має розв'язки при будь-яких  $\lambda$ .

**6.6.** Знайти власні значення і власні функції виродженого ядра  $K(x, t) = t + x$  на проміжку  $[-1, 1]$ .

**6.7.** Знайти власні значення і власні функції ядра  $K(x, t)$  на проміжку  $[0, 2\pi]$ :

(а)  $K(x, t) = \cos(t - x)$ ;

(б)  $K(x, t) = \frac{1}{2} + \sin(x + t)$ .

**6.8.** Знайти власні значення і власні функції ядра  $K(x, t)$  на проміжку  $[0, 1]$ :

(а)  $K(x, t) = x^2 t^2 - \frac{2}{45}$ ;

(б)  $K(x, t) = (x/y)^{2/5} + (y/x)^{2/5}$ .

**6.9.** Побудувати резольвенту ядра  $K(x, t)$  інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, t)\varphi(t)dt,$$

якщо

(а)  $K(x, t) = e^{x-t}$ ;

(б)  $K(x, t) = xt$ ;

(в)  $K(x, t) = 1$ .

**6.10.** Знайти резольвенту і розв'язати інтегральне рівняння:

(а)  $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\pi \sin(x+t)\varphi(t)dt$ ;

(б)  $\varphi(x) = f(x) + \int_{-\pi}^{+\pi} (x \sin t + \cos t)\varphi(t)dt$ .

**6.11.** Використовуючи перетворення Фур'є розв'язати інтегральні рівняння:

(а)  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt)dt = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ;

(б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt)dt = \frac{1}{a^2 + x^2}$ .

**6.12.** Розв'язати інтегральне рівняння:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(x-t)dt = e^{-x^2}$$

# Програма курсу "Методи математичної фізики"

## I. Диференціальні рівняння із частинними похідними

Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними. Класифікація та зведення до канонічного вигляду. Рівняння гіперболічного, параболічного та еліптичного типу. Подальше спрощення вигляду рівнянь з постійними коефіцієнтами. Класифікація рівнянь у випадку, коли кількість незалежних змінних більше двох. (3 години)

Рівняння малих повздовжних коливань в стержні та поперечних коливань у струні. Рівняння електричних коливань у дроті (телеграфні рівняння). Рівняння гідродинаміки та акустики. Хвильове рівняння для тиску, густини та поля швидкостей. (2 години)

Постановка крайових задач для рівнянь гіперболічного типу. Крайові та початкові умови. Крайові умови першого, другого та третього роду. Задачі без крайових умов. Задачі без початкових умов. Принцип суперпозиції та редукція загальної крайової задачі. (2 години)

Задача Коші для рівняння гіперболічного типу. Формула Даламбера. Неоднорідне одновимірне хвильове рівняння. Графічний метод розв'язування задачі Коші. Розв'язування задачі про поширення хвиль у напівобмеженому одновимірному середовищі. Дисперсія хвиль. (3 години)

Метод розділення змінних на прикладі одновимірного однорідного хвильового рівняння. Задача Штурма-Ліувіля. Власні значення та власні функції. Фізичний зміст окремих мод коливань. Енергія коливань стержня (струни). Розв'язування неоднорідного рівняння гіперболічного типу методом розділення змінних. Загальна перша Крайова задача. (6 годин)

Загальна схема методу розділення змінних. Властивості власних функцій та власних значень задачі Штурма-Ліувіля. (4 години)

Одновимірне рівняння дифузії. Динаміка розповсюдження тепла у просторі. Постановка крайових задач для рівнянь параболічного типу. Розв'язування задачі про поширення тепла в необмеженому стержні. Розповсюдження тепла у напівобмеженому стержні. (8 годин)

Автомодельний спосіб розв'язування рівняння теплопровідності. Температурні хвилі. Розв'язування задачі теплопровідності для обмеженого стержня. Розв'язування задачі теплопровідності у випадку неоднорідного рівняння. (4 години)

Фізичні задачі, що приводять до рівнянь еліптичного типу. Постановка крайових задач у випадку рівнянь еліптичного типу. Задача Діріхле і задача Неймана. Розв'язування задачі Діріхле для прямокутної області та для кола методом розділення змінних. (2 години)

Формули Гріна. Загальні властивості гармонічної функції. Принцип максимального значення та його наслідки. Теорема єдиності першої крайової задачі для рівняння Лапласа. Функції Гріна для крайових задач рівняння Лапласа та рівняння Пуасона. Властивості функцій Гріна. Розв'язування задачі Діріхле для напівпростору методом електростатичних зображень. Розв'язування задачі Діріхле для кулі методом електростатичних зображень. (4 години)

## II. Спеціальні функції

Рівняння Беселя. Знаходження розв'язків рівняння Беселя у вигляді узагальнених степеневих рядів. Функція Беселя. Функція Беселя з від'ємним Індексом. Загальний розв'язок рівняння Беселя. Співвідношення ортогональності та норма для функції Беселя. Твірна функція та інтегральне співвідношення для функцій Беселя з цілим індексом. Рекурентні співвідношення для функцій Беселя. Функції Беселя із напівцілим індексом. Функція Неймана та функції Ханкеля першого та другого роду. Загальні властивості нулів циліндричних функцій. Асимптотичний порядок циліндричних функцій. Функція Беселя уявного аргументу (модифікована функція Беселя). Функція Макдональда. Приклади фізичних задач, в яких застосовуються циліндричні функції. (8 годин)

Поліноми Лежандра. Твірна функція для поліномів Лежандра. Представлення потенціалу точкового заряду у вигляді ряду по поліномах Лежандра. Формула Родріго. Співвідношення ортогональності, норма та парність поліномів Лежандра. Рекурентні співвідношення для поліномів Лежандра. Диференціальне рівняння для поліномів Лежандра. Поліноми Лежандра як власні функції задачі Штурма-Ліувілля. Властивості нулів поліномів Лежандра. Приєднані функції Лежандра та сферичні функції. Співвідношення ортогональності та норма. (4 години)

Поліноми Чебишова-Ерміта. Твірна функція. Формула Родріго. Співвідношення ортогональності, норма та парність. Рекурентні співвідношення для поліномів Чебишова-Ерміта. Диференціальне рівняння та відповідна задача Штурма-Ліувілля. Нулі поліномів Чебишова-Ерміта. Нормована хвильова функція гармонічного осцилятора. (2 години)

Поліноми Чебишова-Лагера. Твірна функція. Формула Родріго. Ортогональність і норма. Диференціальне рівняння. Рекурентні співвідношення. Властивості нулів. (2 години)

Деякі загальні властивості класичних ортогональних поліномів. (2 години)



### III. Інтегральні рівняння

Класифікація інтегральних рівнянь. Розв'язування інтегральних рівнянь з виродженим ядром. Розв'язування інтегральних рівнянь методом сіток. Метод поступових наближень. Резольвента. (2 години)

Зведення задачі Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння. (2 години)

Інтегральні рівняння з симетричним ядром. Ортонормована послідовність функцій. Нерівність Беселя. Замкненість та повнота ортонормованої послідовності функцій. Властивості власних функцій та власних значень симетричних ядер. Властивості власних функцій та власних значень ітерованих ядер. Розкладання ітерованих ядер за власними функціями ядра. Теорема розкладності Пльберта-Шмідта. Представлення розв'язку неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма у вигляді ряду за власними функціями ядра. Теорема розкладності Стеклова. Поняття про додатньо та від'ємно визначені ядра. (12 годин)

# Бібліографія

- [1] Будақ Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике, -М.: Наука, 1956.
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, -М.: Наука, 1972.
- [3] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции, -М.: Наука, 1974.
- [4] Задачи по математическим методам физики / Е.А. Кузнецов, А.И.Мильштейн, Е.В. Подивилов та ін.; -М.: Эдиториал УРСС, 2000.