Методичні рекомендації зі спецкурсу "Додаткові розділи математичної фізики" для студентів фізичного факультету

Методичні рекомендації зі спецкурсу "Додаткові розділи математичної фізики"для студентів фізичного факультету / Упорядник О.І. Якименко. - К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2007. -33 с.

Зміст

Вступ

Методичні рекомендації складено на основі програми спецкурсу "Додаткові розділи математичної фізики", що протягом кількох років читався для студентів фізичного факультету спеціалізації "Фізика ядра та елементарних частинок". Метою даного спецкурсу є розвинення практичних навичок з методів розв'язання задач математичної фізики, що потребують знань з теорії функцій комплексної змінної, спеціальних функцій та основ теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Посібник складається з трьох частин. В першій частині зібрано задачі на використання основних методів математичної фізики, що пропонуються студентам в якості завдань для самостійної роботи протягом першого семестру вивчення курсу математичної фізики. Другий розділ присвячено використанню теорії спеціальних функцій в задачах математичної і теоретичної фізики. В останньому, третьому, розділі зібрано задачі, пов'язані з нелінійними рівняннями в частинних похідних. В цьому розділі викладені деякі методи пошуку розв'язків важливих нелінійних задач математичної фізики. Додаток містить корисну довідкову інформацію щодо властивостей спеціальних функцій математичної фізики.

1 Основні методи розв'язання задач математичної фізики

1.1 Метод біжучих хвиль

1. Довести, що розв'язок задачі

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

з неоднорідним рівнянням для нескінченної струни дається узагальненою формулою Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\zeta,\tau)d\zeta.$$

Використовуючи цю формулу, знайти розв'язок наступної задачі:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x\sin t, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

2. Нескінченний пружний стержень отримано з'єднанням в точці $x = 0$ двох однакових напівнескінченних стержнів, виготовлених з різних матеріалів. Лінійна густина маси ρ_1, модуль Юнга E_1 та швидкість поширення малих поздовжних збурень a_1 в області $x < 0$ і, відповідно, ρ_2, a_2, E_2 в області $x > 0$. Нехай з області $x < 0$ по стержню біжить хвиля $u_1(x,t) = f(t - x/a_1)$. Знайти заломлену і відбиту хвилі. Дослідити розв'язок при $E_2 \to 0$ та при $E_2 \to \infty$.

3. Плоске джерело малих збурень рухається з дозвуковою швидкістю вздовж нескінченної циліндричної труби з газом. Вважаючи, що збурення тиску газу $\tilde{p}(t)$ в точці, де знаходиться джерело – задана функція часу, знайти коливання газу зліва і справа від джерела, якщо в початковий момент часу джерело знаходилось в точці $x = 0$, а газ в трубці був незбуреним. Розглянути окремо частинний випадок $\tilde{p}(t) = p_0 \cos\omega t$.

4. Розв'язати задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = -xe^{-x^2}, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

5. Довести, що розв'язок двовимірного неоднорідного хвильового рівняння для нескінченної площини

$$\Box u = f(x,y,t),$$

де $\Box u \equiv u_{tt} - a^2\Delta u$, $-\infty < x, y < +\infty$, з початковими умовами

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y)$$

при $t > 0$ дається формулою Пуасона:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{R_{at}} \frac{\varphi(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} + \int\int_{R_{at}} \frac{\psi(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} \right.$$
$$\left. + \int_0^t d\tau \int\int_{R_{a(t-\tau)}} \frac{f(\zeta,\eta)d\zeta d\eta}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\right\},$$

де $\rho^2 = (\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2$, R_{at} – круг радіусу at з центром в точці (x,y). Використовуючи формулу Пуасона, розв'язати задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 6xyt, \quad -\infty < x, y < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = x^2 - y^2, \\ u_t(x,y,0) = xy. \end{cases}$$

1.2 Метод розділення змінних

6. Довести, що в одновимірному випадку для скінченного відрізку довжиною l для задачі Штурма-Ліувілля

$$y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < l$$

$$(\alpha_1 y' - \beta_1 y)_{x=0} = 0,\ (\alpha_2 y' + \beta_2 y)_{x=0} = 0$$

власну функцію можна записати у наступному вигляді:

$$y_n(x) = \frac{\beta_1 \sin\sqrt{\lambda_n}x + \alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}}.$$

При цьому норма дається виразом

$$\|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)(\lambda_n\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{(\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\lambda_n\alpha_2^2 + \beta_2^2)},$$

а власні числа λ_n є розв'язками рівняння

$$(\alpha_1\alpha_2\lambda - \beta_1\beta_2)\mathrm{tg}\,\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}\,(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

Виділимо частинні випадки для задач Штурма-Ліувілля, що виникають при розв'язанні задачі про коливання струни з різними граничними умовами:

- Обидва кінці закріплені $y(0) = y(l) = 0$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1)$:

$$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x,\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, n = 1, 2, ..., \infty.$$

- Обидва кінці вільні $y'(0) = y'(l) = 0$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0)$:

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x,\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}(1 + \delta_{n,0}), n = 0, 1, 2, ..., \infty.$$

- Лівий кінець закріплений, а правий – вільний $y(0) = y'(l) = 0$ $(\alpha_1 = \beta_2 = 0, \beta_1 = \alpha_2 = 1)$:

$$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x,\ \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}, n = 0, 1, 2, ..., \infty.$$

- Лівий кінець жорстко закріплений, а правий закріплений пружньо $y(0) = 0,\ y'(l) + h_2 y(l) = 0$ $(\alpha_1 = 0, \beta_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = h_2 > 0)$:

$$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x,\ \|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_2}{2(\lambda_n + h_2^2)}, n = 1, 2, ..., \infty,$$

  λ_n – корені рівняння $\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda}/h_2$.

- Лівий кінець вільний, а правий закріплений пружньо $y'(0) = 0,\ y'(l) + h_2 y(l) = 0$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = h_2 > 0)$:

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x,\ \|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{h_2}{2(\lambda_n + h_2^2)}, n = 1, 2, ..., \infty.$$

  λ_n – корені рівняння $\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}/h_2$.

- Обидва кінці закріплені пружньо $y'(0) - h_1 y(0) = 0,\ y'(l) + h_2 y(l) = 0$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = h_1 > 0, \beta_2 = h_2 > 0)$:

$$y_n(x) = \frac{h_1 \sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n + h_1^2}},$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{(h_1 + h_2)(\lambda_n + h_1 h_2)}{(\lambda_n + h_1^2)(\lambda_n + h_2^2)},$$

  а власні числа λ_n є розв'язками рівняння

$$\mathrm{tg}\,\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}\,\frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}.$$

7. Розв'язати задачу про поздовжні коливання стержня $x \in [0, l]$ з жорстко закріпленим лівим кінцем, якщо на правий кінець стержня при $t > 0$ діє сила $F = F_0 t$, де $F_0 =$const.

8. Розв'язати задачу про вимушені коливання мембрани

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \quad 0 < x, y < \pi, \ t > 0, \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0, \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

9. Знайти закон коливань струни довжиною l із закріпленими кінцями, якщо в точці $0 < x_0 < l$ до струни прикріплено маленьку кульку масою M. Розв'язати задачу для довільних початкових умов: $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

10. Верхній кінець пружного однорідного стержня вертикально закріплений до стелі ліфта, що вільно падає зі швидкістю v_0. В момент часу $t = 0$ ліфт миттєво зупинився. Знайти поздовжні коливання в стержні.

11. Поставити (вивести рівняння і сформулювати граничні умови, виходячи з фізичних законів) і розв'язати задачу про *поперечні* коливання затиснутої на одному кінці балки довжиною l, якщо початкові зміщення $u(x, 0) = \varphi(x)$ і початкові швидкості $u_t(x, 0) = \psi(x)$ – задані функції координати x.

12. Розв'язати задачу про коливання струни із жорстко закріпленими на одному рівні кінцями, якщо струна знаходиться під дією поля тяжіння в середовищі з силою тертя, пропорційною до швидкості. Початкові умови довільні.

13. Знайти напругу в однорідному електричному провіднику, якщо відомі опір R, самоіндукція L, втрати G, та ємність C одиниці довжини провідника. Початковий струм і напруга дорівнюють нулю, кінець $x = l$ ізольований, а до кінця $x = 0$, починаючи з моменту $t = 0$, прикладається ерс E.

14. Розв'язати задачу про повздовжні коливання стержня довжиною l, кінець $x = 0$ закріплений жорстко, а кінець $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, рухається по закону $u(l, t) = A \sin \omega t$, $0 < t < +\infty$.

15. Знайти температуру всередині стержня $x \in [0, l]$ з теплоізольованою бічною поверхнею і теплоізольованим кінцем $x = 0$, якщо початкова температура стержня рівна нулю і через кінець $x = l$ в стержень подається постійний тепловий потік q.

16. Тиск і температура повітря в циліндрі $0 \leq x \leq l$ рівні атмосферним, один кінець циліндру з моменту часу $t = 0$ відкритий, а інший залишається весь час закритим. Концентрація деякого газу в оточуючій атмосфері $U_0 =$const. Починаючи з моменту $t = 0$, газ дифундує в циліндр через відкритий кінець. Знайти кількість газу, що продифундує в циліндр, якщо його початкова концентрація в циліндрі дорівнює нулю.

17. Стержень $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею складено з двох однорідних стержнів $0 \le x \le x_0$, $x_0 \le x \le l$ з різних матеріалів. Знайти температуру в стержні, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура довільна.

18. Знайти розподіл температури всередині стержня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічної поверхнею, якщо на його правому кінці $x = l$ підтримується нульова температура, а на лівому кінці $x = 0$ температура змінюється з часом за законом $u(0,t) = At$, $A =$const. Початкова температура всередині стержня рівна нулю.

19. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}. \end{cases}$$

Вказівка: Довести, що функція

$$u(\vec{x}, t) = \prod_{k=1}^{n} u_k(x_k, t),$$

є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k), \end{cases}$$

де $u_k(x_k, t)$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, \ -\infty < x_k < +\infty, \ t > 0, \\ u_k\big|_{t=0} = f_k(x_k). \end{cases}$$

20. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = e^{-(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}. \end{cases}$$

21. Розв'язати стаціонарну задачу теплопровідності для прямокутної пластини, що обмежена координатними осями $x = 0$, $y = 0$, вздовж яких підтримується нульова температура, і прямими $x = a$, $y = b$, що теплоізольовані. Всередині пластини виділяється постійний вздовж пластини потік тепла $Q =$const.

22. Розв'язати внутрішню крайову задачу для області, що обмежена колом радіуса r_0:

$$\begin{cases} \Delta u = -Axy, \\ u\big|_{r=r_0} = 0. \end{cases}$$

При використанні методу розділення змінних для розв'язання задач математичної фізики відповідь отримується, як правило, у вигляді нескінченних рядів. В деяких випадках ці ряди можна просумувати і отримати відповідь в компактному вигляді. Найпростішим методом сумування є зведення відповідних рядів Фур'є до геометричної прогресії за допомогою використання формули Ейлера.

23. Знайти електростатичний потенціал всередині області між провідними пластинами $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0$, якщо пластина $x = 0$ має потенціал U_0, а пластини $y = 0$ та $y = y_0$ – заземлені. Всередині області відсутні вільні заряди. Розв'язати задачу методом розділення змінних. Отриманий ряд підсумувати.

24. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині довгої труби, на поверхні якої заданий розподіл температури: $u(r_0, \varphi) = f(\varphi)$. Отриманий ряд підсумувати.

(а) $f(\varphi) = U_0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $f(\varphi) = -U_0$, $\varphi \in (\pi, 2\pi)$;

(б) $f(\varphi) = U_0$, $\varphi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$, $f(\varphi) = -U_0$, $\varphi \in (\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$;

(в) $f(\varphi)$ – функція загального вигляду. Отримати відповідь у вигляді квадратури.

1.3 Метод інтегральних перетворень

Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є розв'язати наступні крайові задачі:

25.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u,\ -\infty < x, y < +\infty, z > 0, t > 0, \\ u|_{z=0} = f(x,y,t), \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

29. Знайти температуру необмеженого простору, в якому міститься джерело потужністю $g(x,y,z,t)$. Початкова температура простору рівна нулю.

30.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = -h\varphi(t), \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Вказівка: Використати перетворення Фур'є з ядром

$$K(x,\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x}{\lambda^2 + h^2}.$$

Використовуючи перетворення Лапласа розв'язати наступні крайові задачі:

31.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = \varphi(t), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

32.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

1.4 Метод функції Гріна

Проілюструємо метод функції Гріна на прикладі крайової задачі

$$\begin{cases} \Delta u = f,\ \vec{r} \in \Omega, \\ \left(\alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\Big|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = g, \end{cases} \tag{1}$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$, дійсні числа α_1, α_2 такі, що $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$; $\vec{r} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),\ \vec{r} \in \Omega, \\ \left(\alpha_1 G + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right)\Big|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

де $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ – функція Гріна задачі (1). Функція Гріна $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ неперервна разом з першими частинними похідними в області Ω за винятком точки $\vec{r}_0$, де вона може мати особливість.

Підставимо в другу формулу Гріна

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) d\vec{r} = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) dS$$

$v = G$ та врахуємо, що $\Delta u = f$, $\Delta G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. В результаті отримаємо розв'язок задачі (1):

$$u(\vec{r}_0) = \int_{\partial\Omega} \left(G\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right) dS - \int_\Omega G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Фізичний зміст інтегралу

$$\int_\Omega G(\vec{r},\vec{r}_0)f(\vec{r})d\vec{r}$$

можна зрозуміти, помітивши, що неоднорідність f в рівнянні $\Delta u = f$ можна вважати якимось зовнішнім впливом на систему. Цей вплив розкладається в неперервну сукупність джерел в області Ω. Після цього знаходиться відгук на кожне таке елементарне джерело. Оскільки задача лінійна, остаточний результат буде сумою всіх відгуків.

33. Розв'язати задачу Діріхле для напівплощини методом функції Гріна:

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ y > 0,\ -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

34. Розв'язати попередню задачу для різних функцій $g(x)$
(а) $g(x) = x/(x^2+1)$;
(б) $g(x) = k/(x^2+1)$, $k =$const.

35. Знайти функцію Гріна $G(x,x',t)$ одновимірного рівняння Фоккера-Планка:

$$u_t = (xu)_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = g(x).$$

36. Поверхня необмеженого стержня $-\infty < x < +\infty$ теплоізольована, початкова температура рівна нулю. В початковий момент часу в точці $x = x_0$ миттєво виділилось Q одиниць тепла. Знайти температуру стержня. Визначити момент часу, коли температура в точці x досягає максимального значення і знайти це максимальне значення температури.

37. Використовуючи результати попередньої задачі, розв'язати наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

38. На поверхні нескінченного стержня відбувається конвективний теплообмін з середовищем, що має нульову температуру. Початкова температура дорівнює нулю. В точці $x = 0$ неперервно діє теплове джерело сталої потужності Q. Знайти температуру $u(x,t)$ стежня. Знайти стаціонарний розподіл температури при $t \to \infty$. Як зміниться стаціонарний розподіл температури, якщо поверхня стержня буде теплоізольованою?

39. Розв'язати задачу теплопровідності $u_t = a^2 u_{xx} - hu$ для напівпрямої $0 < x < +\infty$ з крайовою умовою першого роду: $u(0,t) = f(t)$.

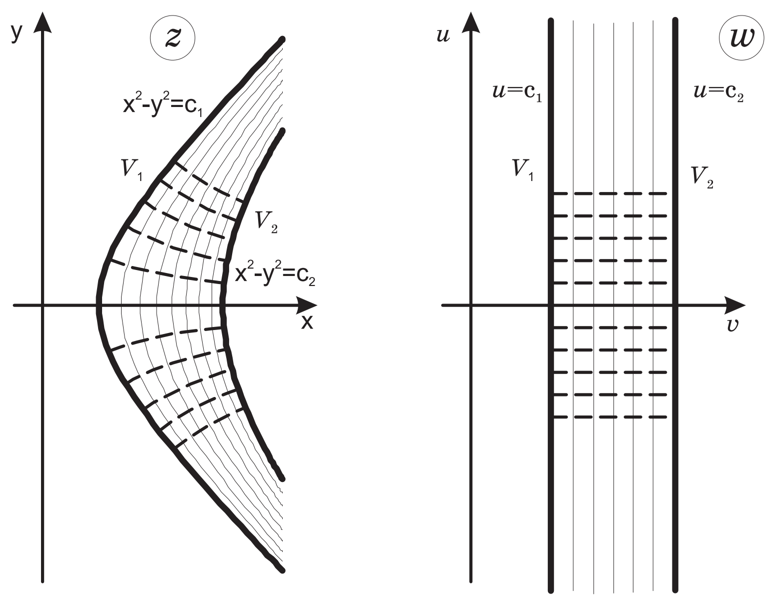
40. Двогранний кут між двома ідеально провідними заземленими пластинами складає $\alpha = \pi/n$ (n – натуральне число). В область між пластинами помістили точковий заряд. Знайти електростатичний потенціал між пластинами.

В наступних розділах буде розглянуто інші задачі на побудову функції Гріна, що вимагають знань властивостей спеціальних функцій.

1.5 Метод конформних відображень

Як відомо, дійсна і уявна частини аналітичної функції $f(z) = u(z)+iv(z)$ є гармонійними функціями, тобто задвольняють рівнянню Лапласа. Це дозволяє використовувати теорію аналітичних функцій для розв'язання двовимірних задач електростатики вважаючи, наприклад, що лінії $v =$const відповідають еквіпотенціальним лініям, а лінії сталої дійсної частини $u =$const відповідають тоді силовим лініям деякого електростатичног поля. Ідею методу конформних відображень можна проілюструвати наступним прикладом.

Приклад *Знайти еквіпотенціальні лінії та лінії електричного поля між двома гіперболічними поверхнями* $x^2-y^2 = c_1$ *із потенціалом* V_1 *та* $x^2-y^2 = c_2$ *із потенціалом* V_2.



Будемо шукати лінії сталого потенціалу, використовуючи метод конформних відображень. Після конформного перетворення $w = z^2$ в змінних u, v отримаємо еквіпотенціальні поверхні $u = c_1$ з потенціалом V_1 та $u = c_2$ з потенціалом V_2. Очевидно, що в цій системі координат еквіпотенцальні поверхні відповідають рівнянням $u = c_j$, а силові лінії – системі прямих $v = c_i$. Таким чином, рівняння еквіпотенціальних поверхонь має вигляд $u = x^2 - y^2 = c_j$, $v = 2xy = c_j$. Як і має бути, силові лінії перпендикулярні до еквіпотенціалей.

41. Знайти відображення функцією w вказаної області:

(a) квадрант $x > 0$, $y > 0$, $w = \frac{z-i}{z+i}$;

(б) кут $0 < \varphi < \pi/4$, $w = \frac{z}{z-1}$;

(в) кільце $1 < |z| < 2$, $w = \frac{z}{z-1}$.

42. За допомогою дробово-лінійної функції $w = \frac{z-4}{z+4}$ відобразити область, що утворюється перетином двох множин $|z-5| > 3 \cap \mathrm{Re}z > 0$, в кільце з центром на початку координат.

43. Знайти відображення функцією Жуковського $w = \frac{k}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

(а) області у формі кільця $r \in [r_1, r_2]$;

(б) полярної сітки;

(в) напівплощини $\mathrm{Im}z > 0$.

44. Знайти функцію, що відображає зовнішню частину еліпса в зовнішню частину кола.

45. Відобразити вказані області на верхню напівплощину $\mathrm{Im}z > 0$:

(а) смугу $0 < y < 1$;

(б) напівсмугу $x > 0$, $0 < y < 1$;

(в) площину, з якої вирізано два кола: $|z| \leq 2$ та $|z-3| \leq 1$.

46. Довгий провідний циліндр одиничного радіусу знаходиться в однорідному електричному полі $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$, направленому перпендикулярно до осі циліндру. Використовуючи перетворення $w = z + 1/z$, знайти електростатичний потенціал зовні циліндру.

47. Розв'язати задачу про розподіл потенціалу всередині напісмуги (див. задачу **23**) методом конформних відображень.

48. Знайти електростатичне поле поблизу границі напівнескінченного конденсатора. Відстань між пластинами $2h$, потенціали на пластинах V_0 і $-V_0$.

49. Пластина масою m падає на поверхню рідини, що заповнює нижній напівпростір. Удар відбувається вздовж смуги шириною $2a$. В момент удару швидкість пластини дорівнює $\vec{v} = -V_0\vec{e}_y$. Знайти швидкість пластини після удару.

50. Нескінченна циліндрична труба радіусу r_0 знаходиться під землею на глибині h. Температура всередині труби дорівнює T_0 і підтримується сталою. Знайти стаціонарний розподіл температури в грунті, якщо поверхня землі має нульову температуру.

2 Спеціальні функції математичної фізики

2.1 Основні властивості спеціальних функцій

Спеціальними функціями називають функції, що часто зустрічаються в різноманітних задачах математичної фізики і, як правило, не виражаються через елементарні функції. Для спец. функцій існують представлення у вигляді нескіченних рядів або інтегралів. Спец. функції є розв'язками деяких лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами. До спец. функцій математичної фізики відносять гіпергеометричні, сферичні та циліндричні функції, класичні ортогональні поліноми та ін. Вивчення спец. функцій із різноманітними властивостями, асимптотичними поведінками, розкладами в ряди і т.д. потребує знань багатьох спеціальних прийомів, що робить теорію спец. функцій складною для сприйняття і використання дисципліною. Підхід, що дозволяє розглядати всі спеціальні функції, використовуючи узагальнену формулу Родріга та інтегральну форму розв'язку відповідного диференціального рівняння, було запропоноавано в книзі [1]. Цей метод дозволяє розв'язувати багато задач математичної фізики, що зводяться до диференціальних рівнянь гіпергеометричного типу, по єдиній схемі.

Будемо називати *рівнянням узагальненого гіпергеометричного типу* рівняння виду

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \tag{2}$$

$\tilde{\tau}(z)$ – поліном не вище першого порядку, $\sigma(z)$ і $\tilde{\sigma}(z)$ – поліноми не вище другого порядку. Рівняння (2) можна спростити і привести за допомогою заміни функції $u(z) = \varphi(z)y(z)$, що не змінює тип рівняння, до так званої *канонічної форми*

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \tag{3}$$

де $\tau(z)$ – поліном не вище першого порядку, λ=const. Послідовність дій, що дозволяє це зробити, представлено на наступній схемі.

Зауваження. 1) Якщо поліном σ має вигляд $\sigma(z) = (z-a)^2$, тобто має кратний корінь, то заміною змінної $s = (z-a)^{-1}$ рівняння приводиться до рівняння із $\sigma(s) = s$. 2) Якщо $\sigma(z) = 1$ і при цьому $(\tilde{\tau}(z)/2)^2 - \tilde{\sigma}(z)$ є поліномом першого порядку, то вихідне рівняння приводиться до рівняння $y'' + (az+b)y = 0$, що лінійною заміною змінної $s = az+b$ можна привести до так званого рівняння Ломмеля:

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{s}y' + \left[(\beta\gamma s^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{s^2}\right]y = 0. \tag{4}$$

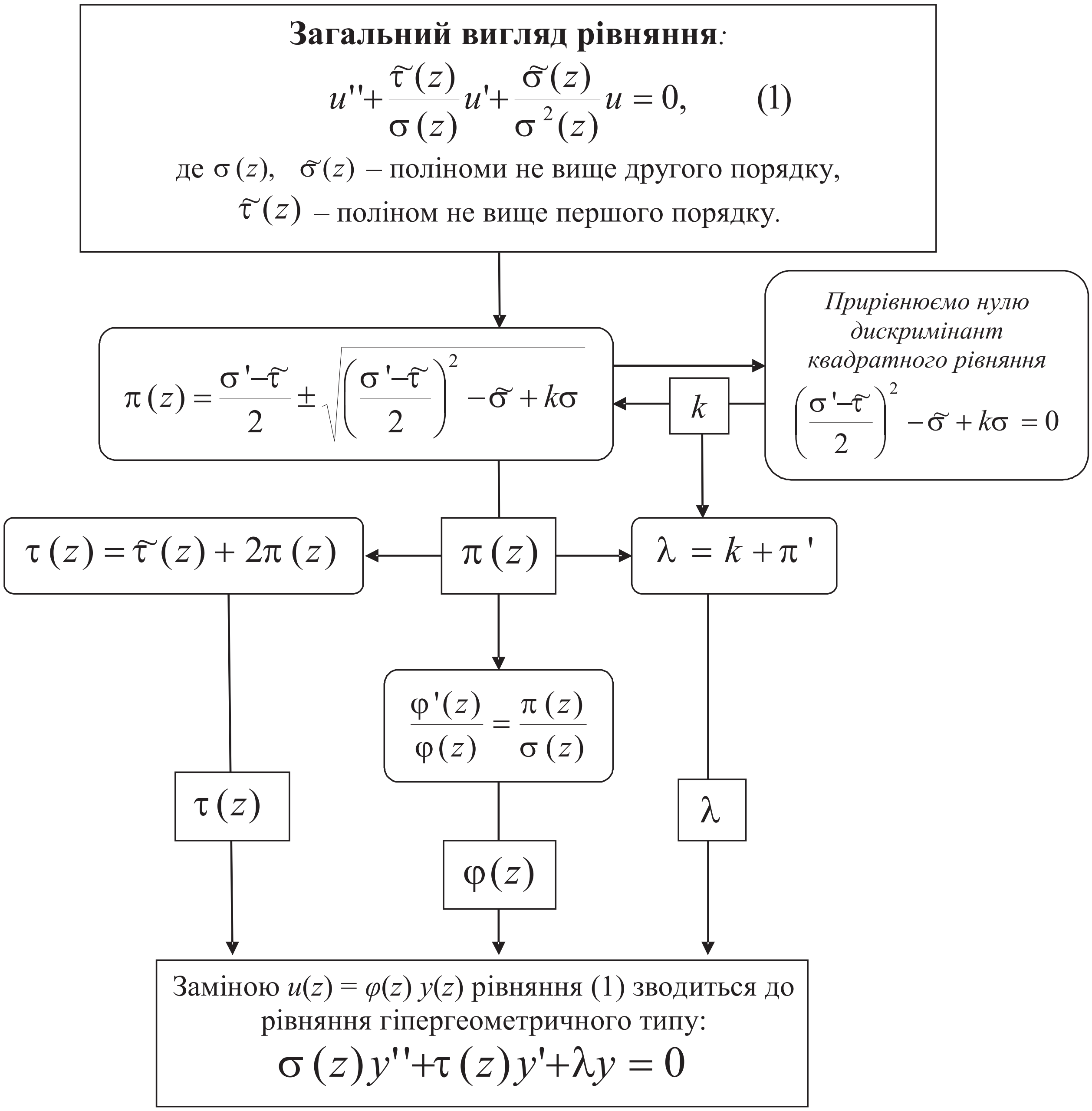


Рис. 1: Схема приведення диференціального рівняння узагальненого гіпергеометричного типу до канонічного вигляду.

Розв'язки цього рівняння виражаються через циліндричні функції $Z_\nu(s)$ порядку ν: $y(s) = s^\alpha Z_\nu(\beta s^\gamma)$. 3) Підстановку, що зводить рівняння до канонічної форми, часто також можна знайти, досліджуючи асимптотичну поведінку розв'язків в околі особливих точок.

При певному значенні константи λ:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\,\sigma'', n = 0, 1, 2, ...$$

рівняння (3) має розв'язки у вигляді поліномів. Ці розв'язки, що називають *поліномами гіпергеометричного типу*, можна представити у вигляді *формули Родріга*:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} \left[\sigma^n(z)\rho(z)\right],$$

де функція $\rho(z)$, що може бути знайдена з рівняння $[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z)$, міститься у *спряженій формі* рівняння (3): $(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0$.

Класичними ортогональними поліномами називають поліноми гіпергеометричного типу $y_n(x)$, для яких функції $\sigma(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ задовільняють умові: $\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,b} = 0$, a, b $k = 0, 1, ...$

Варто зазначити, що для класичних ортогональних поліномів виконуються наступні вимоги до коефіцієнту $\tau(x)$ при першій похідній в канонічній формі (3) рівняння гіпергеометричного типу: (i) $\tau' < 0$, (ii) $\tau(x_0) = 0$, де $x_0 \in (a, b)$. Це правило дозволяє однозначно обирати знаки в формулі для поліному $\pi(x)$ в процесі приведення до канонічного виду.

Класичні ортогональні поліноми утворюють повний набір функцій на відповідному відрізку дійсної осі. Співвідношення ортогональності для класичних ортогональних поліномів має вигляд:

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = \delta_{mn} d_n^2.$$

Класичні ортогональні поліноми поділяють на три типи:

(i) *поліноми Якобі*: $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, що у частинному випадку є *поліномами Лежандра*: $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$;

(ii) *поліноми Лагера* $L_n^{(\alpha)}(x)$;

(iii) *поліноми Ермiта* $H_n(x)$.

Головні властивості класичних ортогональних поліномів наведено в таблиці.

	Поліноми Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Поліноми Лагера $L_n^{(\alpha)}(x)$	Поліноми Ерміта $H_n(x)$
(a,b)	(-1,1)	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$1+\alpha-x$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$
B_n	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\frac{1}{n!}$	$(-1)^n$
a_n	$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n(n-1)!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{(-1)^{n-1}(n+\alpha)}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n!\sqrt{\pi}$

Тут a_n і b_n – коефіцієнти при старших степенях поліному:

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + ...$$

2.2 Задачі з теорії спеціальних функцій

51. Привести до канонічної форми диференціальне рівняння гіпергеометричного типу:
(а) $x^2y'' + xy' + (a^2x^2 - \nu^2)y = 0$;
(б) $y'' + (2\varepsilon - x^2)y = 0$;
(в) $y'' + (\frac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2\alpha x} + \varepsilon)y = 0$. *Вказівка:* ввести нову змінну $s = \mathrm{th}\alpha x$.
52. Знайти твірну функцію для
(а) поліномів Лежандра;
(б) поліномів Ерміта;
(в) поліномів Лагера.
53. Знайти спадаючі на нескінченності розв'язки D-вимірного рівняння Гельмгольца.

$$\Delta_D u - a^2 u = f(\vec{r})$$

Розглянути випадки $D = 2, 3, 4$.
54. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для кулі:

$$\Delta u = 0, \quad u(r_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Отриманий ряд підсумувати і записати відповідь у вигляді квадратури.
55. Використовуючи твірну функцію для функцій Бесселя:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n J_n(x),$$

отримати інтегральне представлення для функції Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi.$$

56. Довести:

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\varphi}.$$

57. Довести, що при $\mathrm{Re}\gamma > \mathrm{Re}\alpha > 0$ частинний розв'язок гіпергеометричного рівняння

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0 \qquad (5)$$

можна представити у вигляді інтегралу:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt.$$

58. Довести, що при $\mathrm{Re}\gamma > \mathrm{Re}\alpha > 0$ розв'язок виродженого гіпергеометричного рівняння

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0 \tag{6}$$

має вигляд $y(z) = A\ F(\alpha;\gamma;z) + B\ G(\alpha;\gamma;z)$, де A, B – довільні сталі,

$$F(\alpha;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt;$$

$$G(\alpha;\gamma;z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt.$$

59. Знайти радіус збіжності

(а) гіпергеометричного ряду:

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!};$$

(б) виродженого гіпергеометричного ряду:

$$F(\alpha;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!},$$

де

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)...(a+n-1).$$

60. Довести формули диференціювання гіпергеометричної та виродженої гіпергеометричної функцій:

(а) $\frac{dF(\alpha,\beta;\gamma;z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)$;

(б) $\frac{dF(\alpha;\gamma;z)}{dz} = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1;\gamma+1;z)$.

61. Довести:

(а) $F(\alpha,\beta;\gamma;z) = F(\beta,\alpha;\gamma;z)$,

(б) $F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)$.

62. Довести формулу перетворення Кумера: $F(\alpha;\gamma;z) = e^z F(\beta-\alpha;\beta;-z)$.

63. Виразити через елементарні функції:

(а) $F(\alpha,0;\gamma;z)$;

(б) $F(\alpha,\beta;\beta;z)$;

(в) $F(0;\beta;z)$;

(г) $F(\alpha;\alpha;z)$;

(д) $G(\alpha;\alpha+1;z)$.

64. Довести, що поліноми Якобі і Лежандра можна виразити через гіпергеометричну функцію за допомогою наступних співвідношень:

(а) $P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-z)/2)$;

(б) $P_n(z) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$.

65. Використовуючи вироджену гіпергеометричну функцію довести:
$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-1/2)}(x^2)$, $H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(1/2)}(x^2)$.

66. Виразити через гіпергеометричну функцію повні еліптичні інтеграли першого та другого роду:

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - z^2 \sin^2\varphi}\ d\varphi, \quad K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - z^2\sin^2\varphi}}.$$

67. Виразити через вироджену гіпергеометричну функцію

(а) функції Лежандра $P_l^m(x)$;

(б) поліноми Ерміта $H_{2n+1}(x)$, $H_{2n}(x)$;

(в) поліноми Лагера $L_n^{(\alpha)}$;

(г) функції Бесселя $J_\nu(x)$.

68. Обчислити інтеграли:

(а) $\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2} J_\nu(bx) x^\rho dx$;

(б) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma, kx) dx,\ \lambda > 0$;

(в) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a > 0, b > 0$;

(г) $\int_0^{+\infty} (x^2+a^2)^{-\mu-1} x^{\nu+1} J_\nu(bx) dx\ , -1 < \nu < 2\mu + \frac{3}{2}$.

69. Обчислити інтеграл Соніна-Гегенбауера:

$$\int_0^{+\infty} \frac{K_\mu(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx.$$

70. Перетворенням Ханкеля ν-го порядку називається інтегральне перетворення

$$\hat{F}(k) = \mathcal{B}_\nu\{f(r)\} = \int_0^{+\infty} f(r) r J_\nu(kr) dr,$$

що існує за умови абсолютної збіжності інтегралу $\int_0^{+\infty} f(r) dr$. Для неперервних функцій, при $\nu \geq -1/2$, обернене перетворення задається аналогічною формулою:

$$f(r) = \mathcal{B}_\nu^{-1}\{\hat{F}(k)\} = \int_0^{+\infty} \hat{F}(k) k J_\nu(kr) dk.$$

Довести наступні властивості перетворення Ханкеля:

$$\text{(а)}\ \mathcal{B}_\nu\left\{f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r)\right\} = -k^2 \mathcal{B}_\nu\{f(r)\}$$

$$\text{(б)}\ \int_0^{+\infty} k \mathcal{B}_\nu\{f(r)\} \mathcal{B}_\nu\{g(r)\} dk = \int_0^{+\infty} r f(r) g(r) dr.$$

71. Знайти спектральне зображення Ханкеля порядку ν функції $f(r)$:
(а) $f(r) = t^m e^{-a^2 r^2}$, $\nu = m$;
(б) $f(r) = \frac{1}{r} e^{-ar}$, $\nu = 0$.

72. Використовуючи перетворення Ханкеля, розв'язати крайову задачу:

$$u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) - \alpha^2 u(r) = f(r),$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(r)$ – задана функція, що спадає на нескінченності до нуля, так що інтеграл $\int_0^{+\infty} f(r) r dr$ – абсолютно збіжний.

73. Розв'язати попередню крайову задачу методом функції Гріна.

74. Використовуючи перетворення Ханкеля, розв'язати крайову задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 \le r < \infty, \ t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \\ u(r,0) = \frac{A}{\sqrt{1 + r^2/b^2}}, \\ u_t(r,0) = 0, \end{cases}$$

де a, A, b – константи.

75. Розв'язати задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + b^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u = 0, \quad 0 \le r < \infty, \ t > 0, \\ u(\infty, t) = u_r(\infty, t) = u_{rr}(\infty, t) = u_{rrr}(\infty, t), \\ u(r,0) = f(r), \ u_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

76. Розв'язати інтегральні рівняння:
(а) $\int_0^\infty \varphi(t) J_0(xt) dt = e^{-\frac{1}{2}x^2}$;
(б) $\int_0^\infty \varphi(t) J_m(xt) dt = x^m e^{-a^2 x^2}$.

77. Довести:

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\beta-\rho-1} F(\alpha, \beta; \gamma; x) dx = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Gamma(\beta-\rho)\Gamma(\gamma-\alpha-\rho)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\rho)},$$

де $\rho > 0, \beta > \rho, \gamma > \alpha + \rho$

78. Довести:

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \, {}_pF_q(\alpha_1, ...\alpha_p; \gamma_1, ..., \gamma_q; x) dx = \frac{1}{s} \, {}_{p+1}F_q(1, \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_p; \gamma_1, ..., \gamma_q; 1/s),$$

де $p \le q$, ${}_pF_q(\alpha_1, ..., \alpha_p; \gamma_1, ..., \gamma_q; x)$ – узагальнена гіпергеометрична функція.

79. Отримати розклад плоскої хвилі по циліндричним гармонікам (розклад Якобі-Ангера):

$$e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\varphi}.$$

80. Отримати розклад плоскої хвилі по поліномам Лежандра:

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta),$$

де $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$ – сферичні функції Бесселя.

2.3 Застосування теорії спец. функцій до задач квантової механіки

Приклад *Знайти значення енергії та хвильові функції частинки, що рухається в полі лінійного гармонійного осцилятора* $U(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$.

Запишемо рівняння Шрьодінгера для даного потенціалу:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi''(x) + \frac{\mu\omega x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x),$$

де $x \in (-\infty, +\infty)$. Введемо безрозмірні змінні $\xi = x/a$, $\varepsilon = E/(\hbar\omega)$, де $a^2 = \hbar/(\mu\omega)$ і перепишемо рівняння Шрьодінгера:

$$\psi''_{\xi\xi} + (2\varepsilon - \xi^2)\psi = 0.$$

Отримане рівняння заміною $\psi(\xi) = \varphi(\xi)y(\xi)$ приведемо до канонічної форми рівняння гіпергеометричного типу. Ототожнимо коефіцієнти рівняння, порівнюючи його із загальним виглядом рівняння (2): $\sigma(\xi) = 1$, $\tilde{\tau}(\xi) = 0$, $\tilde{\sigma}(\xi) = 2\varepsilon - \xi^2$. Діючи за схемою, розглянутою раніше, отримаємо вираз для поліному $\pi(\xi)$:

$$\pi(\xi) = \pm\sqrt{k - 2\varepsilon + \xi^2}.$$

Щоб знайти k, прирівнюємо до нуля дискримінант підкореневого виразу: $D = -4(k - 2\varepsilon) = 0 \Rightarrow k = 2\varepsilon$. Тобто, $\pi(\xi) = \pm\xi$,

$$\tau(\xi) = \tilde{\tau}(\xi) + 2\pi(x) = \pm 2\xi.$$

Виберемо знак таким чином, щоб поліном $\tau(\xi)$ мав від'ємну похідну: $\tau(\xi) = -2\xi$, при цьому виконується також і умова наявності кореня поліному: $\tau(\xi_0) = 0$ при $\xi_0 = 0$. Таким чином, для поліному $\pi(\xi)$ остаточно отримаємо: $\pi(\xi) = -\xi$. Далі підставляємо цей вираз в формули для $\tau(\xi)$, λ і в рівняння для функції $\varphi(\xi)$

$$\tau(\xi) = -2\xi;\ \lambda = k + \pi'(\xi) = 2\varepsilon - 1;\ \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = \frac{\pi(\xi)}{\sigma(\xi)} \Rightarrow \varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Отже, отримаємо рівняння гіпергеометричного типу в канонічній формі:

$$y''_{\xi\xi} - 2\xi\ y'_{\xi} + (2\varepsilon - 1)y = 0.$$

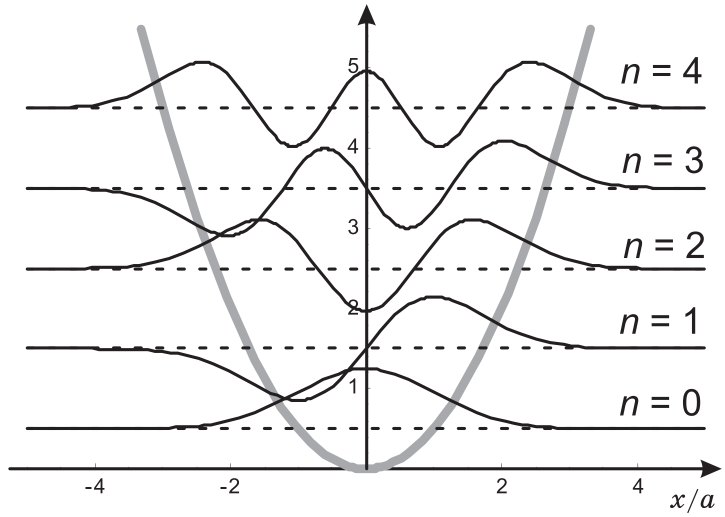


Рис. 2: Потенціал лінійного гармонійного осцилятора у безрозмірних змінних $U(x/a)/(\hbar\omega) = \frac{1}{2}(x/a)^2$ (сіра лінія) та хвильові функції $\psi_n(x/a)$ станів $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (чорні лінії). Для зручності на графіку представлені функції $y(x) = \sqrt{a}\psi_n(x/a) + n + 1/2$.

Рівні енергії знаходимо з умови існування поліноміальних розв'язків (в цьому випадку хвильова функція задовольняє умові квадратичної інтегровності):

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0 \Rightarrow \varepsilon_n = n + 1/2.$$

Використовуючи рівняння $[\sigma(\xi)\rho(\xi)]' = \tau(\xi)\rho(\xi)$, знаходимо функцію $\rho(\xi) = e^{-\xi^2}$. Хвильові функції можна записати, використовуючи формулу Родріга:

$$\psi_n(\xi) = \frac{B_n}{\rho(\xi)}\frac{d^n}{d\xi^n}\left[\sigma^n(\xi)\rho(\xi)\right] = B_n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}.$$

Помічаємо, що цей вираз з точністю до множника співпадає з поліномом Ерміта. Повертаючись до старих змінних, отримаємо:

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\frac{1}{2}(x/a)^2} H_n(x/a), E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Константу нормування C_n знаходимо з умови

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2(x)dx = 1 \Rightarrow C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! a\sqrt{\pi}}},$$

де використано співвідношення ортогональності для поліномів Ерміта:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

81. Знайти значення енергії та власні функції частинки, що рухається в полі з потенціалом $U(x)$:

(а) $U(x) = -U_0/\mathrm{ch}^2\alpha x$, $U_0 > 0$ – потенціал Пешля-Теплера;

(б) $U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$, $U_0 > 0$ – потенціал Морзе.

82. Знайти значення енергії і хвильові функції стаціонарного стану двовимірного осцилятора в полярних координатах: $U(r) = \mu\omega^2 r^2/2$. Обчислити середньо-квадратичний радіус гармонійного осцилятора: $\langle r^2 \rangle = \langle \psi | r^2 | \psi \rangle$.

83. Знайти значення енергії ($E < 0$) та хвильові функції частинки, що рухається в центрально-симетричному полі з потенціалом $U(r)$:

(а) $U(r) = \mu\omega^2 r^2/2$ – сферично-симетричний осцилятор;

(б) $U(r) = -\alpha/r$ – кулонівський потенціал;

(в) $U(r) = A/r^2 - B/r$;

(г) $U(r) = A/r^2 + Br^2$.

84. Знайти в квазікласичному наближенні рівні енергії частинки, що рухається в полі $U(x) = \mu\omega^2 x^2/2$ (лінійний гармонійний осцилятор).

85. Знайти в квазікласичному наближенні рівні енергії електрона в кулонівському полі $U(r) = -\alpha/r$.

86. Обчислити електростатичний потенціал, що створюється в заданій точці простору воднеподібним атомом. Розглянути випадок, коли електрон знаходиться в основному стані.

3 Автомодельність та нелінійні рівняння математичної фізики

Нелінійні рівняння в частинних похідних часто зустрічаються в фізичних задачах. Нажаль, загальних методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних не існує. Отримати точний загальний розв'язок нелінійних рівнянь математичної фізики вдається лише у виняткових випадках. Однак існують методи, що дозволяють знайти частинні точні розв'язки деяких важливих фізичних задач.

Диференціальне рівняння в частинних похідних двох незалежних змінних x, t має *автомодельний* розв'язок, якщо існують такі функції часу $A(t)$, $l(t)$, що розв'язок $u(x,t)$ можна представити у вигляді:

$$u(x,t) = A(t) f\left(\frac{x}{l(t)}\right).$$

Задача зводиться до звичайного диференціального рівняння для функції $f(\xi)$. В багатьох фізичних задачах автомодельну підстановку можна знайти, використовуючи аналіз розмірностей.

Важливими частинними розв'язками є розв'язки типу біжучі хвилі:

$$u(x,t) = f(x - Vt),$$

де f – функція однієї змінної, V=const.

Точні розв'язки типу біжучої хвилі і автомодельні розв'язки часто описують асимптотичну поведінку більш широких класів розв'язків, що відповідають іншим початковим і крайовим умовам. Ця властивість дозволяє робити висновки загального характеру і прогнозувати динаміку різноманітних явищ і процесів.

Приклад *Знайти локалізований автомодельний розв'язок задачі теплопровідності*

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

для нескінченного стержня, якщо в початковий момент часу $u(x,0) = Q\delta(x)$.

Розв'язок залежить від координати x, часу t, а також від параметрів задачі a^2, Q. Розмірності цих величин наступні: $[x] = L$, $[t] = T$, $[a^2] = L^2/T$, $[Q] = [u]L$. Із цих величин можна сконструювати одну безрозмірну комбінацію: $\xi = t^\alpha x (a^2)^\gamma$. Для визначення показників степенів маємо два рівняння $\alpha - \gamma = 0$ і $1 + 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = -1/2$, тобто $\xi = \frac{x}{a\sqrt{t}}$. Автомодельний розв'язок задачі теплопровідності має вигляд:

$$u(x,t) = \frac{Q}{a\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{a\sqrt{t}}\right).$$

Безрозмірну f функцію можна знайти, підставивши автомодельний розв'язок в рівняння теплопровідності:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}.$$

87. Знайти автомодельну підстановку для нелінійного рівняння Шрьодінгера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi|^2\psi = 0.$$

88. Знайти автомодельні змінні для рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом степеневого типу:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \beta u^n.$$

89. Знайти розв'язок рівняння Хопфа

$$u_t + uu_x = 0,$$

із початковою умовою $u(x,0) = \pi/2 - \mathrm{arctg} x$, визначити момент перекидання хвилі з таким початковим профілем.

90. Рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty$$

описує слабкі ударні хвилі в середовищі з дисипацією енергії. Знайти розв'язки типу ударної хвилі, що задовольняють умовам

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = u_1, \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u_2.$$

91. Довести, що рівняння Бюргерса підстановкою Коула-Хопфа

$$u = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(x,t)$$

перетворюється в лінійне рівняння для $\theta(x,t)$. Використовуючи таку підстановку, знайти періодичний в просторі розв'язок рівняння Бюргерса.

92. Заміною $v(x,t) = e^{b\,u(x,t)}$ звести нелінійне рівняння

$$u_t = u_{xx} + b(u_x)^2 + f(x,t)$$

до лінійного.

93. Заміною невідомої функції звести квазілінійне диференціальне рівняння

$$\Delta u - (\nabla u)^2 = 0$$

до лінійного.

Приклад *Знайти розв'язок у вигляді біжучої хвилі для рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ):*

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Знайти частинний розв'язок, що спадає до нуля на нескінченності разом із своїми похідними першого та другого порядків.

Шукаємо розв'язки у вигляді біжучої хвилі $u(x,t) = f(x - Vt)$. Після підстановки в рівняння КдФ для функції $f(\xi)$, де $x = x - Vt$, отримаємо рівняння третього порядку: $f''' + (6f - V)f' = 0$, яке можна проінтегрувати: $f'' + 3f^2 - Vf + C_1 = 0$. Домножимо отримане рівняння f' і ще раз проінтегруємо: $\frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{1}{2}Vf^2 + C_1 f + C_2 = 0$. Для того, щоб розв'язок разом із своїми похідними першого і другого порядку спадав до нуля, треба вибрати $C_1 = C_2 = 0$. Рівняння в такому випадку інтегрується в елементарних функціях:

$$\frac{V - 2f}{V} = \mathrm{th}^2(\sqrt{V}\xi/2),$$

і остаточно

$$u(x,t) = \frac{V/2}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\sqrt{V}}{2}(x - Vt)\right]}.$$

Цей розв'язок рівняння КдФ у вигляді локалізованої поодинокої хвилі називають *солітоном*. Амплітуда і ширина солітону однозначно зв'язані з його швидкістю: солітони з більшою амплітудою мають меншу ширину і більшу швидкість.

94. Знайти розв'язок у вигляді поодинокої біжучої хвилі рівняння нелінійної струни

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0.$$

95. Довести, що рівняння

$$u_t = (uu_x)_x + x$$

не має розв'язків у вигляді біжучої хвилі.

96. Знайти точний розв'язок рівняння Борна-Інфельда

$$(1 - u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0$$

у вигляді біжучої хвилі.

97. Еволюція поля $\psi(\vec{r}, t)$ в двовимірному просторі описується нелінійним рівнянням Шрьодінгера:

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0.$$

(а) Довести, що функціонали

$$N = \int |\psi|^2 d\vec{r}, \quad H = \int \left(|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4 \right) d\vec{r}$$

є інтегралами руху цього рівняння.

(б) Довести, що для локалізованого в просторі початкового збурення ефективна ширина

$$r_{\text{eff}}^2 = \int r^2 |\psi|^2 d\vec{r}$$

задовольняє рівнянню

$$\frac{d^2 r_{\text{eff}}^2}{dt^2} = -8H.$$

98. Використовуючи варіаційний метод, знайти наближений стаціонарний розв'язок $\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)e^{i\mu t/\hbar}$ тривимірного нелінійного рівняння Шрьодінгера:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M}\Delta\Psi - g\Psi\,|\Psi|^2 - \frac{M\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)\Psi = 0,$$

де хвильова функція нормована на кількість частинок: $\langle\Psi|\Psi\rangle = N$. Взяти в якості пробної функції $\psi(x,y,z) = he^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{w^2}}$. Дослідити стійкість розв'язку при різної кількості частинок N та різних хімічних потенціалах μ.

99. Знайти розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

у вигляді біжучої хвилі $u(x,t) = u(x-ct)$, $\alpha \geq 1$, $c =$const.

100. Знайти автомодельні розв'язки квазілінійного рівняння теплопровідності:

$$u_t = k_0(u^2u)_x + q_0u^\beta, \quad -\infty < x < +\infty, 0 < t \leq T$$

із початковими умовами $u(x,0) = u_0(x)$

(а) при $q_0 = 0$;

(б) при $q_0 \neq 0$. Розглянути випадки $\beta = 2,3,4$.

Література

[1] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики, -М.: Наука, 1984. -344 с.

[2] Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подивилов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики, -М.: Эдиториал УРСС, 2000. -288 с.

[3] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы функций комплексного переменного, -М.: Наука, 1957.

4 Додаток

4.1 Гамма-функція Ейлера

Означення:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

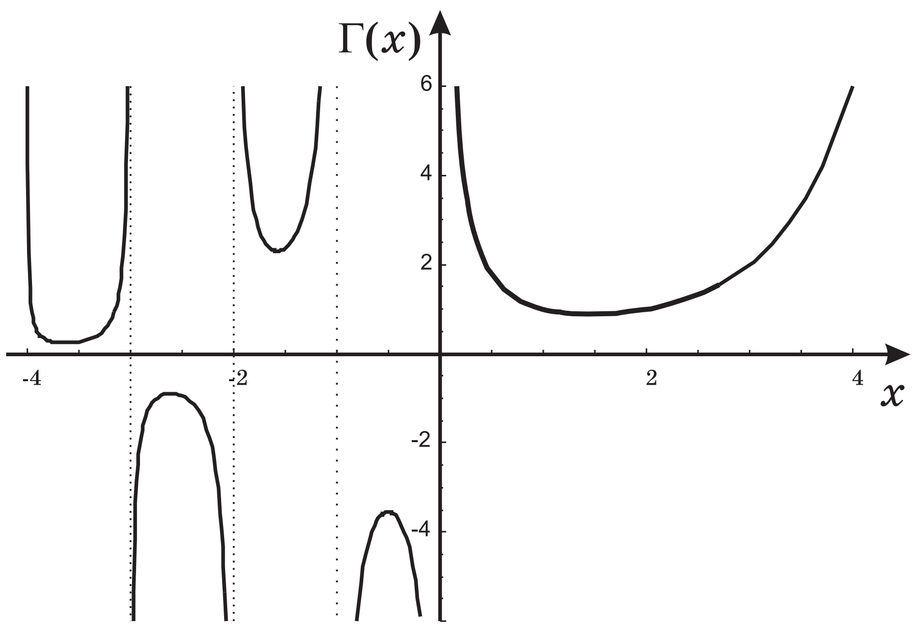


Рис. 3: Гамма-функція Ейлера $\Gamma(x)$.

Функціональні співвідношення:

$$\Gamma(x+1) = z\Gamma(x); \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}; \quad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x).$$

Частинні випадки:

$$\Gamma(n+1) = n! \ \ (n = 0, 1, 2, ...);$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, ...).$$

4.2 Поліноми Лежандра

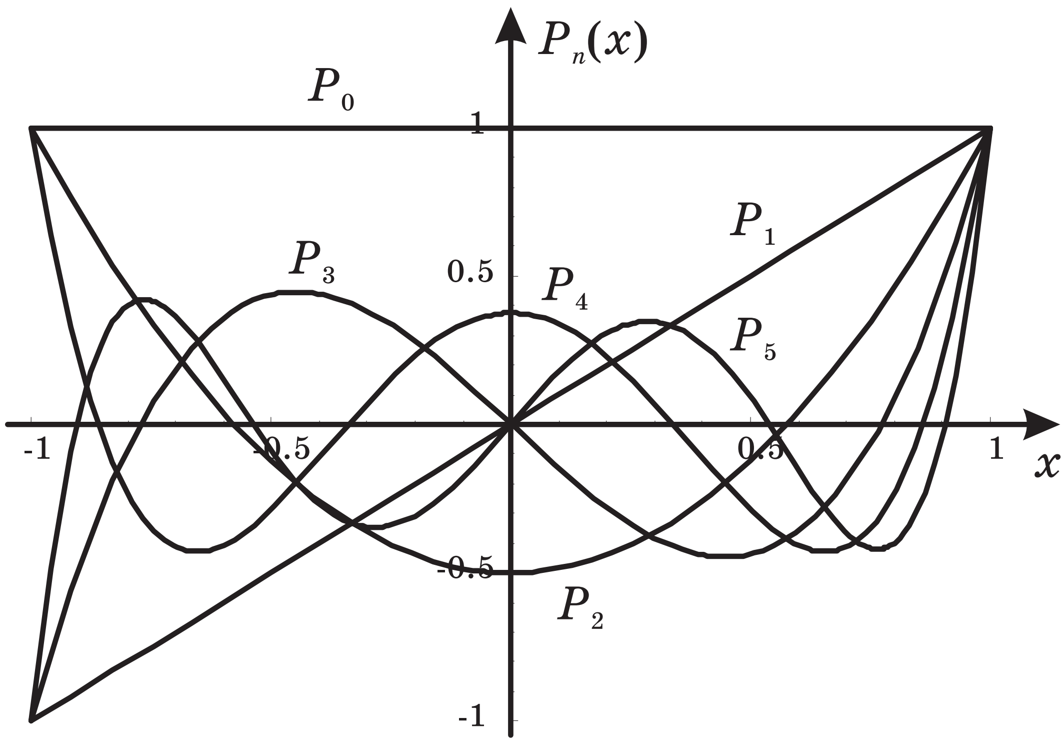


Рис. 4: Поліноми Лежандра $P_n(x)$.

Диференціальне рівняння для поліномів Лежандра:

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + l(l+1)u = 0$$

Формула Родріга:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

Явний вигляд перших трьох поліномів:

$$P_0(x) = 1, \ P_1(x) = x, \ P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \ P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}.$$

Рекурентне співвідношення:

$$x(2l+1)P_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x).$$

Асимптотична поведінка для великих значень порядку:

$$P_l(\cos\theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{\sin[(l+1/2)\theta + \pi/4]}{\sqrt{\sin\theta}}, \quad l|\sin\theta| \gg 1.$$

Диференціальне рівняння для поліномів Лагера $L_n^\alpha(x)$:

4.3 Поліноми Лагера

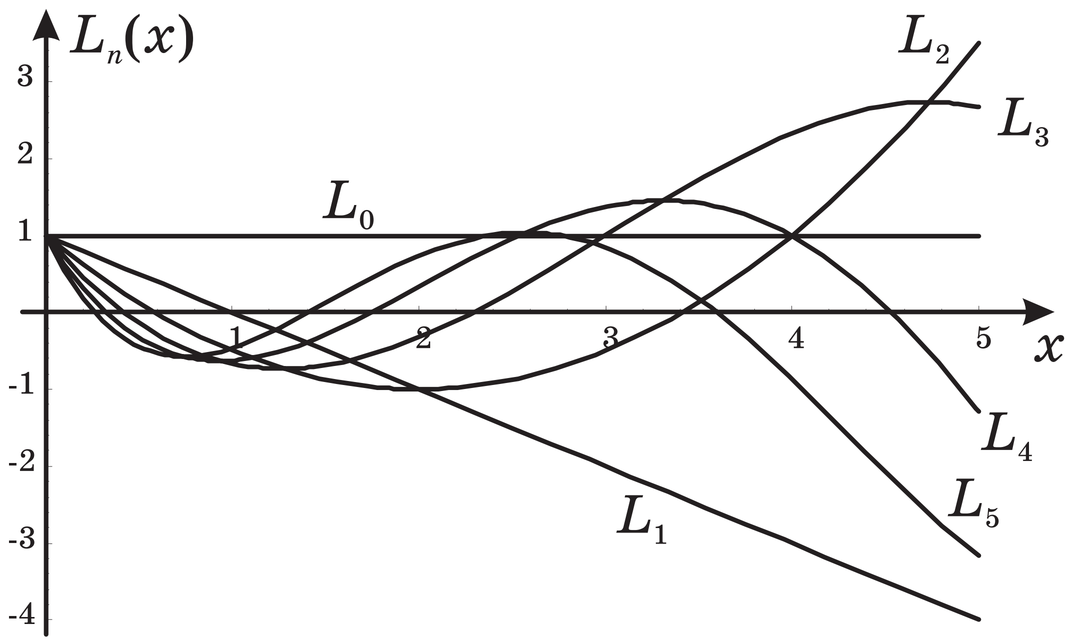


Рис. 5: Поліноми Лагера $L_n(x) = L_n^0(x)$.

$$x(1-x^2)u'' + (\alpha + 1 - x)u' + nu = 0.$$

Формула Родріга:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^l}{dx^l}(x^{\alpha+n} e^{-x}).$$

Явний вигляд перших трьох поліномів:

$$L_0^\alpha(x) = 1, \ L_1^\alpha(x) = \alpha + 1 - x, \ L_2^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - (\alpha+2)x + \frac{x^2}{2}.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{nm} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Рекурентне співвідношення:

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0.$$

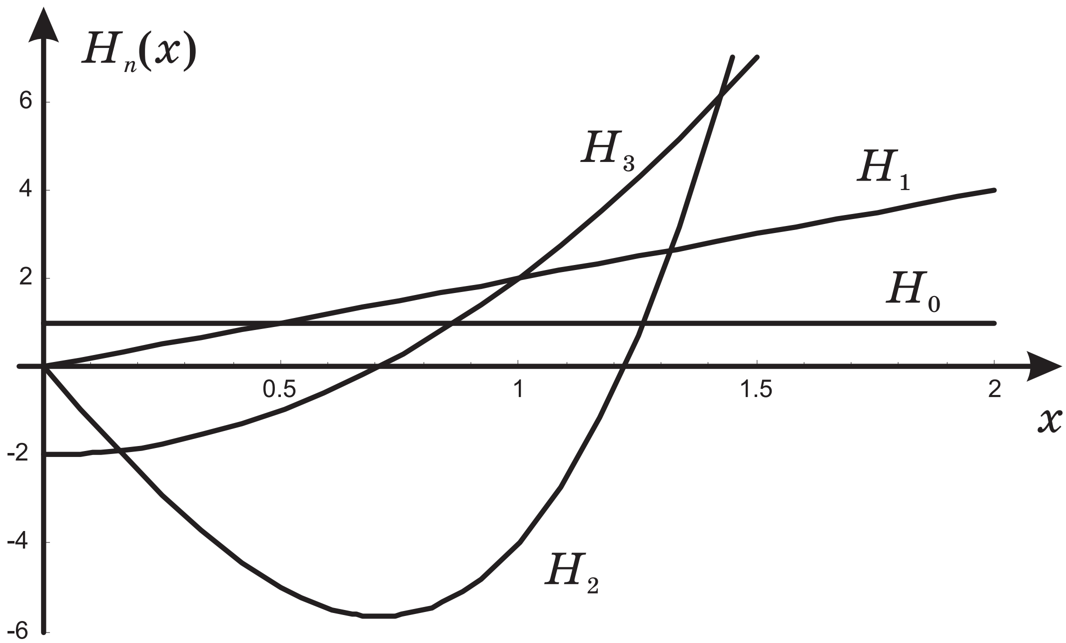


Рис. 6: Поліноми Ерміта $H_n(x)$.

4.4 Поліноми Ерміта

Диференціальне рівняння для поліномів Ерміта:

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0.$$

Формула Родріга:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Явний вигляд перших трьох поліномів:

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекурентне співвідношення:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

4.5 Циліндричні функції

Рівняння Беселя:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0.$$

Рекурентне співвідношення:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{n+1}(x).$$

Інтегральне представлення:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi - i\nu\varphi} d\varphi - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{sh}\,t - \nu t} dt.$$

Співвідношення ортогональності:

$$\int_0^l x J_\nu(\alpha_m x/l) J_\nu(\alpha_n x/l) dx = \delta_{nm}\frac{l^2}{2}\left\{J'\,^2_\nu(\alpha_n) + (1-\nu^2/\alpha_n^2)J_\nu^2(\alpha_n)\right\},$$

де $\{\alpha_k\}$ – корені одного з рівнянь:

(а) $J_\nu(\alpha) = 0$,
(б) $J'_\nu(\alpha) = 0$,
(в) $\alpha J'_\nu(\alpha) + hJ_\nu(\alpha) = 0$.

Асимптотична поведінка при $x \to +\infty$:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\ H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{\pm i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},\ K_\nu(x) = i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H^{(1)}(ix) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}.$$

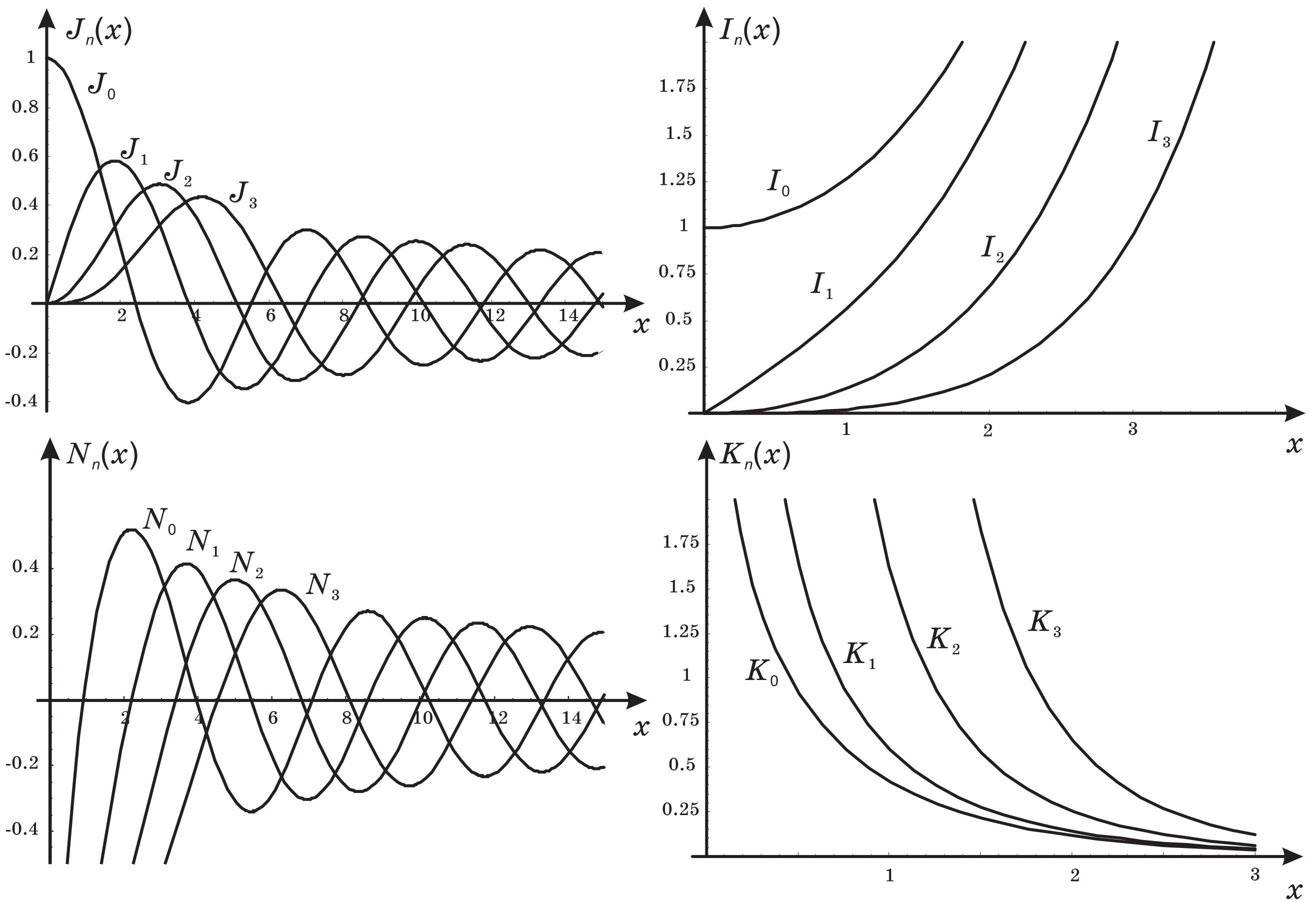


Рис. 7: Циліндричні функції та модифіковані циліндричні функції.