КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

І.С. Доценко, О.І. Якименко

Методичні рекомендації до практичних занять з курсу "Методи математичної фізики" для студентів фізичного факультету

Київ 2006

Методичні рекомендації до практичних занять з курсу "Методи математичної фізики"для студентів фізичного факультету/ І.С.Доценко, О.І.Якименко, - К.: РВЦ "Київський університет", 2006. - 50 с.

Рецензенти:

Київський університет імені Тараса Шевченка, 2006.

Зміст

1. Вступ.

Теоретичні дослідження різноманітних фізичних процесів і явищ в багатьох випадках зводяться до розв'язування задач, основними складовими яких є диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Прикладами таких рівнянь є: хвильове рівняння, що описує динаміку поширення хвиль різної природи, рівняння теплопровідності і дифузії, що описують процеси перенесення в сереедовищі теплоти або речовини, рівняння Лапласа і Пуасона, добре відомі з розділу "Електростатика", тощо. Ключове рівняння квантової механіки – рівняння Шрьодінгера також являє собою диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними.

Основні властивості диференціальних рівнянь з частинними похідними розглянемо спочатку на прикладі рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, загальний вираз якого можна представити у вигляді:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \tag{1.1}$$

тобто це – деяке співвідношення між незалежними змінними x, y, шуканою функцією $u(x, y)$, частинними похідними першого u_x, u_y та другого u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} порядків від шуканої функції. Тут і надалі для скорочення використовуються такі позначення: $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Розв'язком рівняння (1.1) називається будь-яка функція, що перетворює дане рівняння в тотожність.

В університетському курсі фізики застосовуються переважно лінійні диференціальні рівняння. *Лінійні диференціальні рівняння* другого порядку з частинними похідними з двома незалежними змінними самого загального вигляду представляються виразом:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f, \tag{1.2}$$

де коефіцієнти a_{ij}, b_i, c та функція f залежать тільки від змінних x, y і не залежать від шуканої функції u та її похідних. Функція $f(x, y)$ вважається заданою. Якщо $f(x, y) \equiv 0$, то рівняння (1.2) називається *однорідним*. Коефіцієнти a_{11}, a_{12} і a_{22} називають коефіцієнтами при старших похідних (тобто при похідних найвищого, в даному рівнянні, порядку).

Часто замість змінних x, y в рівнянні (1.2) доцільно обрати інші, нові незалежні змінні ξ, η, що пов'язані зі "старими" змінними певним чином: $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$. Незалежність нових змінних ξ і η між собою визначається умовою відмінності від нуля Якобіану переходу до нових змінних:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \not\equiv 0. \tag{1.3}$$

При переході від старих змінних до нових рівняння (1.1) або (1.2) певним чином перетворюється. При цьому лінійне рівняння завжди перетворюється в лінійне. В перетвореному рівнянні шукана функція, її похідні і коефіцієнти рівняння залежать від нових змінних. Шляхом певного цілеспрямованого вибору нових змінних рівняння (1.2) можна суттєво спростити, звівши його до типового, так званного *канонічного* виду. В залежності від значення виразу (*дискримінанту*) $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, складеного з коефіцієнтів рівняння (1.2), останнє відноситься до одного з трьох типів.

При $D > 0$ рівняння (1.2) має назву рівняння *гіперболічного* типу. Будь-яке рівняння гіперболічного типу шляхом належного вибору нових змінних $\xi = \xi(x, y)$ і $\eta = \eta(x, y)$ можна звести до відповідного канонічного виду (розглядається випадок однорідного рівняння, коли $f = 0$):

$$u_{\xi\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = 0. \tag{1.4}$$

Наступним перетворенням, шляхом вибору інших змінних $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ рівняння (1.4) можна представити в іншій формі

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \tilde{b}_1 u_\alpha + \tilde{b}_2 u_\beta + \tilde{c}u = 0, \tag{1.5}$$

що також вважається канонічною.

Якщо $D < 0$, то рівняння (1.2) називається рівнянням *еліптичного* типу і канонічний вид цього рівняння представляється виразом:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\alpha + \bar{b}_2 u_\beta + \bar{c}u = 0. \tag{1.6}$$

Якщо $D = 0$, то рівняння (1.2) має назву рівняння *параболічного* типу, і канонічна форма такого рівняння записується у вигляді

$$u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\alpha + \bar{b}_2 u_\beta + \bar{c}u = 0. \tag{1.7}$$

Назви "гіпеболічний", "еліптичний" та "параболічний" тип надано рівнянням, виходячи з аналогії, при порівнянні з назвами кривих другого порядку, що описуються квадратичною формою загального виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0. \tag{1.8}$$

Якщо $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то рівняння (1.8) є рівнянням гіперболи, якщо $D < 0$, то відповідна крива є еліпсом, якщо $D = 0$ – параболою.

Слід зауважити, що рівняння різного типу відрізняються одне від одного не тільки зовнішнім виглядом, а що більш суттєво, вони якісно відрізняються характером розв'язків і описують принципово різні фізичні процеси і явища. Рівняння гіперболічного типу виражають динаміку хвильових процесів, розв'язки таких рівнянь, зокрема, описують поширення звукових або електромагнітних хвиль а також стоячі хвилі в різних середовищах. Рівняння параболічного типу описують процеси дифузії або поширення теплоти. Розв'язки рівнянь еліптичного типу, як правило, описують стаціонарний розподіл температури в середовищі, стаціонарний розподіл концентрації речовини, або розподіл в просторі електростатичного потенціалу при заданому розподілі зарядів.

Якщо коефіцієнти a_{ij}, b_i та c в рівнянні (1.2) є сталими величинами, тобто не залежать від x і y, то після зведення до канонічного виду рівняння залишаються рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Канонічну форму рівняння із сталими коефіцієнтами можна ще додатково спростити шляхом заміни шуканої функції: $u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}v(\xi, \eta)$. Належним підбором значень параметрів λ і μ рівняння зводиться до наступного остаточного вигляду.

$v_{\xi\eta} + \gamma v = 0$, або $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v = 0$– рівняння гіперболічного типу.
$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v = 0$– рівняння еліптичного типу.
$v_{\eta\eta} + \bar{b}_2 v_\eta + \gamma v = 0$– рівняння параболічного типу.

Теоретичне обгрунтування зведення рівняння до канонічного виду наведене в [2].

На допомогу практичній процедурі зведення рівнянь до канонічного виду наводимо схему, в якій відображена послідовність дій для отримання канонічного виду рівняння.

Схема зведення диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними до канонічного вигляду.

Загальний вигляд рівняння:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0,$$

$$\hat{L}u+cu=0$$

Характеристичні рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$$

$D>0$ *гіперболічний тип*

$\varphi(x,y)=c_1$

$\psi(x,y)=c_2$

$\xi=\varphi(x,y)$

$\eta=\psi(x,y)$

$D=0$ *параболічний тип*

$\varphi(x,y)=c$

$\psi(x,y)$ *– довільна, незалежна від* $\varphi(x,y)$

$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y)$

$D<0$ *еліптичний тип*

$\varphi(x,y)=c$

$\psi=\varphi^*$

$\alpha=\operatorname{Re}\varphi(x,y)$

$\beta=\operatorname{Im}\varphi(x,y)$

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2;\quad \bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2;$$

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\bar{b}_1=\hat{L}\xi;\quad \bar{b}_2=\hat{L}\eta;\quad \bar{c}=c.$$

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}+\bar{b}_1u_\xi+\bar{b}_2u_\eta+\bar{c}=0$$

Гіперболічний тип

$\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}=0;$

$u_{\xi\eta}+\bar{b}_1u_\xi+\bar{b}_2u_\eta+\bar{c}u=0.$

$\alpha=\dfrac{\xi+\eta}{2};\quad \beta=\dfrac{\xi-\eta}{2}$

$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}+\tilde{b}_1u_\alpha+\tilde{b}_2u_\beta+\tilde{c}u=0$

Параболічний тип

$\bar{a}_{11}=\bar{a}_{12}=0;$

$u_{\eta\eta}+\bar{b}_1u_\xi+\bar{b}_2u_\eta+cu=0.$

Еліптичний тип

$\bar{a}_{12}=0;\quad \bar{a}_{11}=\bar{a}_{22};$

$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\bar{b}_1u_\alpha+\bar{b}_2u_\beta+cu=0.$

Застосування таблиці демонструється в наступному прикладі.

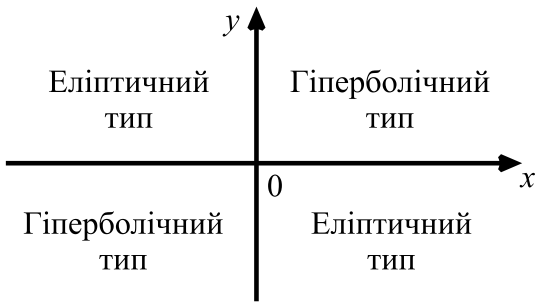
Приклад 1

Звести до канонічного виду рівняння:

$$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}u_y = 0$$

- Порівнюємо дане рівняння із загальним виразом (1.2) для лінійного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними і визначаємо коефіцієнти рівняння: $a_{11} = x$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -y$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{2}$, $c = 0$.

- Визначаємо дискримінант D і встановлюємо тип рівняння. $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \Rightarrow D = xy$. Звідси видно, що в залежності від знаків x та y дискримінант може бути додатнім або від'ємним.



  На площині (x, y) встановлюємо області в, яких дискримінант має постійний знак. В першому квадранті $(x > 0, y > 0)$ та в третьому квадранті $(x < 0, y < 0)$ дискримінант $D > 0$ і, отже, дане рівняння є рівнянням гіперболічного типу. В другому $(x < 0, y > 0)$ і в четвертому $(x > 0, y < 0)$ квадрантах дискримінант $D < 0$. Отже, рівняння відноситься до рівнянь еліптичного типу. Вздовж координатних осей рівняння має параболічний тип $(D = 0)$.

  Визначаємось, з областю в якій треба звести рівняння до канонічного виду. Оберемо, наприклад, перший квадрант, тобто область де $x > 0$ і $y > 0$.

- Записуємо характеристичне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{xy}}{x}, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

  Двом знакам "+" та "−" відповідають два різні характеристичні рівняння:

  1) $y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}$, 2) $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$.

- Інтегруємо диференціальні рівняння першого порядку і знаходимо відповідні загальні інтеграли:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = \tilde{C}_1 \\ 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \tilde{C}_2, \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = C_2. \end{array}\right.$$

  Згідно теорії, нові змінні ξ та η обираються формальною заміною $C_1 \to \xi$, $C_2 \to \eta$: $\xi = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, $\eta = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, або

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \\ \eta = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

- Для знаходження коефіцієнтів перетвореного рівняння попередньо знаходимо частинні похідні:

$$\begin{array}{ll} \xi_x = \frac{1}{2}x^{-1/2} & \eta_x = \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ \xi_{xx} = -\frac{1}{4}x^{-3/2} & \eta_{xx} = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \\ \xi_y = -\frac{1}{2}y^{-1/2} & \eta_y = \frac{1}{2}y^{-1/2} \\ \xi_{yy} = \frac{1}{4}y^{-3/2} & \eta_{yy} = -\frac{1}{4}y^{-3/2} \\ \xi_{xy} = 0 & \eta_{xy} = 0. \end{array}$$

- Обчислюємо коефіцієнти перетвореного рівняння:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\eta_y + a_{22}\xi_y^2 = x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)^2 + 0 - y\left(-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)^2 + 0 - y\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$= x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 0 - y\left(-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\bar{b}_1 = \hat{L}\xi = x\xi_{xx} - y\xi_{yy} + \frac{1}{2}\xi_x - \frac{1}{2}\xi_y =$$

$$= x\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) - y\left(\frac{1}{4}y^{-3/2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right) = 0,$$

$$\bar{b}_2 = \hat{L}\eta = x\eta_{xx} - y\eta_{yy} + \frac{1}{2}\eta_x - \frac{1}{2}\eta_y =$$

$$= x\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) - y\left(-\frac{1}{4}y^{-3/2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}\right) = 0,$$

$$\bar{c} = c = 0.$$

Зауважимо, що в данному випадку обчислення коефіцієнтів $\bar{a}_{11}$ та $\bar{a}_{22}$ не є обов'язковим, оскільки, згідно теорії у випадку рівнянь гіперболічного типу ці коефіцієнти завжди дорівнюють нулю. Але безпосереднє обчислення коефіцієнтів $\bar{a}_{11}$ та $\bar{a}_{22}$ дозволяє перевірити правильність знаходження загальних інтегралів характеристичних рівнянь.

- Враховуючи отримані значення нових коефіцієнтів, запишемо перетворене рівняння:

$$2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} = 0,$$

або остаточно:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

В даному випадку, завдяки спеціальному вибору коефіцієнтів a_{ij} і b_i, кінцевий вираз для рівняння виявився найпростішим з усіх можливих для рівнянь гіперболічного типу. В більш загальному випадку, після всіх наведених вище операцій, рівняння гіперболічного типу набуває вигляду:

$$2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = 0,$$

або після ділення на $2a_{12}$:

$$u_{\xi\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{c}u = 0.$$

Тут коефіцієнти $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ та $\tilde{c}$ можуть залежати від старих змінних x та y. За допомогою оберненого перетворення, з рівностей $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ старі змінні виражаємо через нові: $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ і підставляємо в коефіцієнти $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ та $\tilde{c}$. Тоді рівняння запишеться виключно через нові змінні ξ та η.

Аналогічно можна звести рівняння до канонічного виду і в інших квадрантах.

Для впевненого засвоєння методу рекомендується самостійно опрацювати наведені нижче завдання.

Звести до канонічного виду та спростити рівняння:

1.1. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$

1.2. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2u_y = 0$

1.3. $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$

1.4. $\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1.5. $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0$

1.6. $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} + xu_x + u_y = 0$

1.7. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$

1.8. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0$

1.9. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$

1.10. $\mathrm{sign} x\, u_{xx} + 2u_{xy} + \mathrm{sign} y\, u_{yy} = 0$

1.11. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

1.12. $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} - u = 0$

1.13. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0$

1.14. $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$

1.15. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$

1.16. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$

1.17. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$

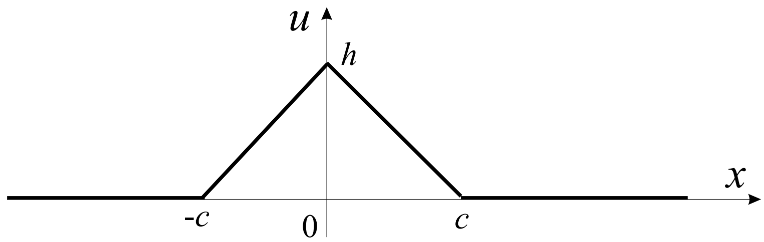
1.18. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - u = 0$

1.19. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$

1.20. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$

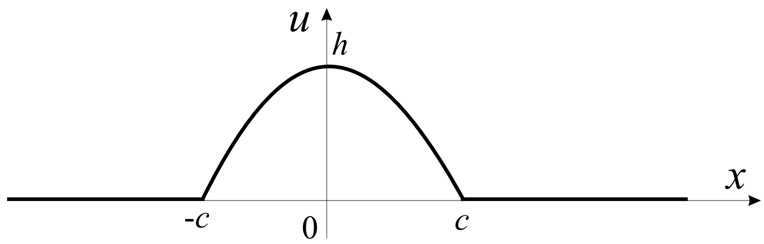
2. Метод характеристик.

2.1. В момент часу $t = 0$ необмежена струна була збуджена відхиленням, зображеним на рисунку. Намалювати профілі струни для моментів часу $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 1, 2, 3, 5$.



2.2. По необмеженій струні біжить хвиля $\varphi(x - at)$, де φ – незалежна функція. Прийнявши цю хвилю за початкове збурення струни при $t = 0$, знайти стан струни при $t > 0$.

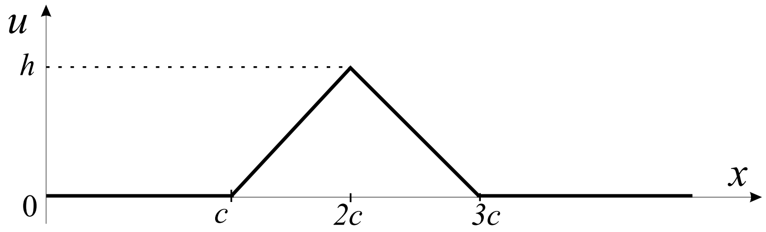
2.3. Безмежна струна в початковий момент на ділянці $x \in [-c, c]$ має форму симетричної параболи. (а) Знайти профіль струни (аналітичний вираз для зміщення $u(x, t)$) у будь-який момент $t > 0$. (б) Знайти зміщення точок струни з різними значеннями координати x.



2.4. В початковий момент часу частина $x \in [-c, c]$ необмеженої струни мала поперечну швидкість v_0, всі інші частини струни мали нульову швидкість. (а) Знайти аналітичні формули для зміщення струни з різними значеннями координати при $t > 0$. (б) Намалювати профілі струни для моментів часу $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6$.

2.5. В початковий момент часу в точці $x = x_0$ по необмеженій струні вдарили вузьким молоточком, надавши струні імпульс I. Знайти відхилення $u(x, t)$ точок струни від положення рівноваги при $t > 0$, якщо початкові зміщення точок струни дорівнюють нулю.

2.6. Напівобмежена струна в початковий момент часу має форму, що зображена на рисунку. Намалювати профіль струни при $t_k = \frac{kc}{2a}$, $k = 0, 2, 3, 4, 7$, якщо (а) струна закріплена на кінці; (б) струна має вільний кінець.



2.7. Знайти відхилення від положення рівноваги $u(x,t)$ струни довжиною l, якщо кінці $x = 0, x = l$ закріплені, початкова швидкість дорівнює нулю, а початкове зміщення задане: $u(x,0) = A\sin(\pi x/l)$ при $x \in [0,l]$.

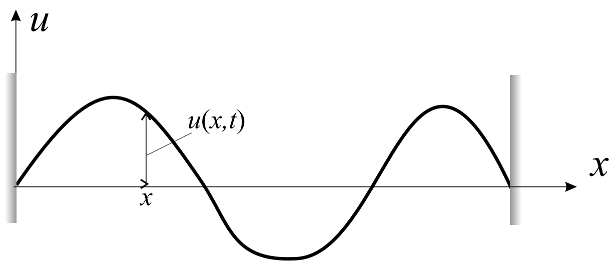
2.8. Розв'язати задачу **2.5** для напівобмеженої струни з закріпленим кінцем.

3. Метод розділення змінних

Метод розділення змінних, або метод Фур'є, є потужним і найбільш поширеним засобом розв'язування задач математичної фізики. Опанування даного методу є передумовою засвоєння різноманітних питань теоретичної і математичної фізики. Зокрема, задача на власні значення, або задача Штурма-Ліувілля, що є обов'язковою складовою методу розділення змінних, містить в собі ключ до розуміння квантування (набуття дискретних можливих значень) фізичних величин в квантовій механіці.

Типовими задачами, до розв'язування яких застосовується метод розділення змінних, є крайові задачі в обмежених областях з рівняннями гіперболічного, параболічного і еліптичного типів. Ефективність методу полягає у суттєвому спрощенні задачі шляхом зведення проблеми розв'язування диференціального рівняння з частинними похідними до розв'язування звичайного диференціального рівняння. Безпосередньо сам метод являє собою певну послідовність дій, які за своєю суттю однакові для різних задач, незалежно від їх фізичного змісту і складності. Отже, зміст методу розділення змінних можна пояснити на прикладі досить простої фізичної задачі.

Задача про вільні коливання обмеженої струни.



Обговоримо фізичний зміст задачі, та сформулюємо її повну математичну постановку. Натягнута струна довжиною l, що закріплена жорстко на кінцях, може коливатись в поперечному відносно струни напрямку. Нехай в початковий момент $t_0 = 0$ кожна точка струни зміщена в поперечному напрямку на величину $u(x,0) = \varphi(x)$ і рухається із швидкістю $u_t(x,0) = \psi(x)$, де x – координата точки в стані спокою струни в положенні рівноваги. Початкові відхилення всіх точок струни і початкові швидкості лежать в одній площині (площина (u,x)). Отже, зрозуміло що коливання струни буде відбуватись в тій самій площині. Вважаємо, що на струну в поперечному напрямку не діють ніякі зовнішні сили. Під дією внутрішніх сил, внаслідок початкового зміщення від положення рівноваги і внаслідок наявності початкової швидкості, точки струни будуть певним чином коливатись навколо положення рівноваги. Задача полягає в тому, щоб знайти зміщення $u(x,t)$ будь-якої точки струни $0 < x < l$ в довільний момент часу $t > 0$.

Математичне формулювання даної задачі стисло записується у вигляді:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Шукана функція $u(x,t)$ залежить від двох змінних: координати x і часу t. Диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними (3.1) описує динаміку процесу коливань сукупності усіх точок струни. При виведенні даного рівняння враховано другий закон Ньютона і закон Гука, і крім того, вважалось, що внутрішнє тертя відсутнє і, як зазначено вище, відсутні зовнішні сили. Параметр a, що входить в рівняння, залежить від сили натягу струни T і лінійної густини (маси одиниці довжини) струни ρ: $a = \sqrt{T/\rho}$. Крайові умови (3.2) відображають фізичні умови на кінцях струни, а саме: кінці струни жорстко закріплені, отже, зміщення точок, що мають координати $x = 0$, $x = l$, дорівнюють нулю в усі моменти часу $t > 0$.

Зміст початкових умов (3.3) з'ясовано вище. При математичному формулюванні задачі слід обов'язково вказати також межі, в яких набувають значень незалежні змінні x і t.

Під *коректною постановкою задачі* розуміють наступне: кількість умов, що додаються до рівняння (3.1), повина бути такою, щоб, з одного боку, не було зайвих, інакше розв'язку може не існувати взагалі, а з іншого боку, ця кількість повина бути достатньою, щоб розв'язок був однозначним. Отже, при коректній постановці розв'язок задачі існує і він лише один. При математичному формулюванні фізичної задачі додаткові умови відображають реальні фізичні умови і інтуїція фізика допомагає поставити задачу коректно.

В математичній фізиці розв'язується не рівняння, а задача в цілому. Отже, розв'язувати задачу слід починати лише після її повного коректного математичного формулювання. Оскільки задачу (3.1)-(3.3) сформульовано повністю і коректно, то наступним етапом є розв'язання задачі, і для цього застосуємо саме *метод розділення змінних*.

Процес розв'язування розіб'ємо на декілька послідовних кроків. Спочатку поставимо завдання не в повному обсязі задачі, а сформулюємо так звану *основну допоміжну задачу*:

Знайти нетривіальні розв'язки рівняння (3.1), що задовольняють крайовим умовам (3.2) і мають вигляд добутку двох функцій:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t), \tag{3.4}$$

кожна з яких ($X(x)$ та $T(t)$) залежить лише від однієї незалежної змінної (лише від x або від t).

Тут під виразом *нетривіальні розв'язки*, як це звичайно прийнято, розуміють розв'язки, що не дорівнюють нулю тотожно: $u(x,t) \not\equiv 0$. Зауважимо, що в основній допоможній задачі початкові умови до уваги не беруться. Далі вимагаємо, щоб функція $u(x,t)$ задовольняла рівнянню (3.1), для цього підставимо в рівняння (3.1) функцію $u(x,t)$ у вигляді (3.4). Похідні по часу t позначимо крапками, а похідні по координаті x – штрихами: дві крапки і два штрихи означатимуть відповідні похідні другого порядку:

$$X(x) \cdot \ddot{T}(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t).$$

Розділимо ліву і праву частини отриманої рівності на вираз $a^2 X(x) T(t)$. Тоді маємо:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{3.5}$$

Зауважимо, і на цьому зробимо наголос, що рівність (3.5) має виконуватись при всіх значеннях $0 < x < l, \quad t > 0$. Внаслідок наведених дій змінні в рівності (3.5) розділились (звідси назва методу розділення змінних): ліва частина рівності залежить тільки від t, права частина – тільки від x.

Нагадаємо, що змінні x і t є незалежними одна від одної. Якщо, наприклад, зафіксувати деяке значення $x = x_0$, а t змінювати, то рівність (3.5) не порушується:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)}.$$

При фіксованому значенні $x = x_0$ права частина рівності є деякою константою. Позначимо її через $(-\lambda)$. Знак "$-$" тут не має принципового значення, оскільки λ може бути як додатнім, так і від'ємним. Тоді для всіх $t > 0$ маємо:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

а з урахуванням (3.5) маємо також:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отже, наслідком розділення змінних є рівність:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

що еквівалентно сукупності двох рівнянь:

$$\ddot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{3.6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{3.7}$$

Відтепер замість рівняння (3.1) з частинними похідними маємо справу із звичайними диференціальними рівняннями (3.6) та (3.7), пов'язаними між собою лише спільним *параметром розділення* λ. Добуток довільного розв'язку рівняння (3.6) на довільний розв'язок рівняння (3.7) обов'язково буде розв'язком рівняння (3.1). В основній допоміжній задачі вимагається також, щоб цей розв'язок задовольняв крайові умови (3.2):

$$\begin{gathered} u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0; \\ u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

при всіх значеннях $t > 0$. Якщо покласти $T(t) \equiv 0$, то крайові умови (3.2) задовольняються, але при цьому розв'язок $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ дорівнює нулю тотожно, тобто розв'язок є тривіальним, що протирічить одній з умов основної допоміжної задачі. Отже, для того, щоб розв'язок був нетривіальним і одночасно щоб умови (3.2) виконувались, треба покласти: $X(0) = 0$ і $X(l) = 0$.

Розглянемо тепер рівняння (3.7) разом з умовами, що накладаються на функцію $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Ми прийшли до окремої задачі, так званої задачі на власні значення, або *задачі Штурма-Ліувілля.* Сформулюємо зміст цієї задачі:

Знайти такі значення параметра λ, при яких існують нетривіальні розв'язки рівняння (3.9), що задовольняють умовам (3.10), а також знайти самі ці розв'язки.

Зауважимо, що розв'язки рівняння (3.9) існують при будь-яких значеннях λ. Але розв'язки, що задовольняють умовам (3.10), існують лише при певних λ. Значення λ, при яких існують нетривіальні розв'язки (3.9)-(3.10), називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувілля, а самі розв'язки, що відповідають цим власним значенням – *власними функціями.*

Задача Штурма-Ліувілля є складовою частиною основної допоміжної задачі. Обов'язковими рисами задачі Штурма-Ліувілля є наявність параметра і додаткових умов, що накладаються на розв'язки диференціального рівняння.

Зосередимось тепер на розв'язанні задачі Штурма-Ліувілля (3.9)-(3.10). Для цього треба спочатку записати загальний розв'язок рівняння (3.9). Вигляд цього розв'язку залежить від того, чи є значення параметру λ додатнім, від'ємним чи воно дорівнює нулю. Розглянемо послідовно ці три випадки окремо.

1. <u>Нехай $\lambda < 0$.</u> Тоді загальний розв'язок рівняння (3.9) має вигляд:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}x}. \tag{3.11}$$

З'ясуємо, чи існують такі значення коефіцієнтів A і B, при яких розв'язок (3.11) задовольняє крайовим умовам (3.10). Зауважимо, що A і B не повинні одночасно дорівнювати нулю, оскільки при $A = 0$ і $B = 0$ розв'язок $X(x) \equiv 0$ є тривіальним, що протирічить умові задачі Штурма-Ліувілля.

Отже, з крайових умов (3.10) маємо:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\sqrt{|\lambda|}l} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Маємо систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих A і B. Однорідна система (3.12) має нетривіальний розв'язок (A і B не дорівнюють нулю одночасно), якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}\,l} & e^{-\sqrt{|\lambda|}\,l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|}\,l} - e^{\sqrt{|\lambda|}\,l}$$

дорівнює нулю. Безпосередньо з вигляду правої частини цієї рівності видно, що в даному випадку $\Delta \neq 0$, оскільки $e^{-\sqrt{|\lambda|}\,l} < 1$, а $e^{\sqrt{|\lambda|}\,l} > 1$ за будь-яких значень $\lambda < 0$.

Висновок: *при $\lambda < 0$ задача Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10) не має розв'язків, тобто при $\lambda < 0$ не існує власних значень, а отже не існує відповідних їм власних функцій.*

2. <u>Нехай $\lambda = 0$</u>. Тоді рівняння (3.9) набуває вигляду

$$X''(x) = 0,$$

а його розв'язок є лінійною функцією x:

$$X(x) = Ax + B. \tag{3.13}$$

З умов (3.10) маємо:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ Al = 0. \end{cases}$$

Оскільки $l \neq 0$, то $A = 0$ і $B = 0$ одночасно; тобто, існує лише тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$. Звідси висновок: $\lambda = 0$ *не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10).*

Нарешті, розглянемо останній з можливих випадків.

3. <u>Нехай $\lambda > 0$.</u> Як і в двох попередніх випадках, запишемо загальний розв'язок рівняння (3.9):

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

і вимагаємо, щоб він задовольняв умови (3.10):

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Якщо покласти $B = 0$, то умови (3.10) задовольняться, але тоді $A = 0$ і $B = 0$ одночасно, тобто отримаємо тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$, який не вважається за розв'язок задачі Штурма-Ліувілля.

На відміну від двох попередніх, в данному випадку є альтернатива: вважаємо, що $B \neq 0$, тоді

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0.$$

Така рівність має місце, якщо

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, \text{де} \ \ n = 1, 2, 3, ... \tag{3.15}$$

Від'ємні цілі значення n не беруться до уваги, оскільки $\sqrt{\lambda}l$ – додатня величина.

З (3.15) випливає, що нетривіальні розв'язки задачі Штурма-Ліувілля існують лише при певних значеннях параметра λ. Кожному значенню n відповідає своє значення $\lambda_n = (\pi n/l)^2$. Кожному значенню λ_n відповідає функція

$$X_n(x) = \tilde{B}_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}l\right) \Rightarrow X_n(x) = \tilde{B}_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Розв'язком задачі Штурма-Ліувілля називається сукупність всіх власних значень λ_n і відповідних власних функцій $X_n(x)$:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \tilde{B}_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \end{cases} \tag{3.16}$$

де $n = 1, 2, 3...$; $\tilde{B}_n$ – довільна стала. Отже, задача Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10) має нескінченну, зліченну множину власних функцій і власних значень. Зауважимо, що всі власні значення задачі (3.9), (3.10) – додатні. В одному з наступних розділів будуть сформульовані загальні умови за яких всі власні значення задачі Штурма-Ліувілля є додатніми.

Оскільки розв'язок задачі Штурма-Ліувілля знайдено, то продовжуємо далі необхідні дії щодо розв'язання основної допоміжної задачі. Звертаємось тепер до рівняння (3.6). Нагадаємо, що (3.6) і (3.7) пов'язані спільним параметром λ. Тому, оскільки розв'язки задачі Штурма-Ліувілля існують лише за певних дискретних значеннь λ_n, то і рівняння (3.6) слід розв'язувати тільки при тих самих значеннях $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, отже рівняння (3.6) треба переписати у вигляді:

$$\ddot{T}_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0,$$

або

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \tag{3.17}$$

де $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$. Індекс n у функції $T_n(t)$ означає, що різним значенням λ_n відповідають різні функції $T_n(t)$.

Запишемо загальний розв'язок рівняння (3.17):

$$T_n(t) = C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t).$$

Тоді функції

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (3.18)$$

є частинними розв'язками основної допоміжної задачі. Тобто $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, ...$ є розв'язками рівняння (3.1), що задоволняють крайові умови (3.2) при довільних значеннях констант $A_n = C_n \cdot \tilde{B}_n$, $B_n = D_n \cdot \tilde{B}_n$. Таким чином, основну допоміжну задачу розв'язано, оскільки розв'язки (3.18) задовольняють всім вимогам даної задачі.

Оскільки рівняння (3.1) є лінійним, крайові умови (3.2) є лінійними та однорідними, то за принципом суперпозиції для лінійних задач, довільна лінійна комбінація частинних розв'язків $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (3.19)$$

також є розв'язком рівняння (3.1), що задоволняють крайові умови (3.2) при будь-яких значеннях констант A_n і B_n.

Виконаємо тепер останні дії для отримання розв'язку задачі (3.1)-(3.3) про коливання обмеженої струни. Поставимо питання наступним чином: а чи не можна "підібрати"значення коефіцієнтів A_n і B_n в (3.19) такими, щоб функція $u_n(x,t)$ у вигляді (3.19) задовольняла б і початковим умовам (3.3)? Отже, коефіцієнти A_n і B_n повинні мати такі значення, щоб виконувались рівності:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (3.20)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (3.21)$$

За своїм змістом (3.20) і (3.21) є розкладом заданих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряд Фурє за синусами. Отже, для знаходження коефіцієнтів A_n і B_n можна скористатись відомими формулами для коефіцієнтів ряду Фур'є.

Але, в загальному випадку, власні функції задачі Штурма-Ліувілля $X_n(x)$ не зводяться до тригонометричних функцій, і тоді розкладання в ряд за функціями $X_n(x)$ називається розкладанням в узагальнений ряд Фур'є. Знайдемо значення коефіцієнтів A_n і B_n в (3.20) і (3.21) стандартним методом, який використовується при розкладанні функцій за власними функціями будь-якої задачі Штурма-Ліувілля.

Скористаємось тим, що функції $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ і $X_m(x) = \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$ ортогональні між собою на відрізку $x \in [0, l]$, при $m \neq n$:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx = \frac{l}{2}\delta_{nm}.$$

Домножимо ліву і праву частини рівності (3.20) на $\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$ і проінтегруємо по x отримані вирази на відрізку $[0, l]$:

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{l}{2}\delta_{nm} = \frac{l}{2}A_m.$$

Звідси:

$$A_m = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx, \quad m = 1, 2, 3... \tag{3.22}$$

Оскільки m і n пробігають одну і ту саму множину значень: $m = 1, 2, 3...$; $n = 1, 2, 3...$, то в (3.22) можна замінити m на n:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx. \tag{3.23}$$

Використовуючи аналогічну процедуру по відношенню до рівняння (3.21) отримаємо:

$$\frac{l}{2}\omega_n B_n = \int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

звідси:

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx. \tag{3.24}$$

Таким чином, всі коефіцієнти A_n і B_n визначені однозначно згідно (3.23) і (3.24) і, отже, функція (3.19) є єдиним розв'язком задачі (3.1)-(3.3) про вільні коливання обмеженої струни.

Фізична інтерпретація розв'язку задачі.

Отримання математичного виразу для розв'язку задачі математичної фізики дозволяє перейти до наступного етапу теоретичного дослідження фізичного процесу. Всебічний аналіз цього виразу дає можливість виявити властивості та характерні особливості, притаманні безпосередньо даному явищу, дозволяє надати йому якісне тлумачення та провести аналогії з іншими процесами та явищами.

Розглянемо окремий доданок в розв'язку (3.19) нашої задачі:

$$u_n(x,t) = \{A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t\} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{3.25}$$

та представимо його у вигляді:

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \cdot \cos(\omega_n t + \delta_n), \tag{3.26}$$

де $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\delta_n = -\mathrm{arctg}\frac{B_n}{A_n}$.

Вираз (3.26) має типовий вигляд функції, що описує *стоячі хвилі*. З нього випливає, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією і тією ж частотою ω_n. Амплітуда коливань $u_0 = |\alpha_n \sin(\pi n x/l)|$ залежить від координати x, отже, взагалі кажучи, різні точки струни коливаються з різними амплітудами.

Точки з координатами $x_k = k\frac{l}{n}$, $(k = 0, 1, 2, ..., n)$, для яких $\sin(\pi n x/l) = 0$, залишаються нерухомими впродовж всього процесу, тобто амплітуда коливань даних точок дорівнює нулю. Такі точки називають *вузлами* стоячої хвилі.

Точки з координатами $x_m = \frac{(2m+1)l}{2n}$ $(m = 0, 1, 2, ..., n-1)$, для яких $|\sin(\pi n x/l)| = 1$, коливаються з максимальною амплітудою, що дорівнює α_n. Такі точки називають *пучностями* стоячої хвилі.

Відстань між двома сусідніми вузлами, так само, як відстань між двома сусідніми пучностями, дорівнює $\Delta x = l/n$, і кожна пучність знаходиться посередині між двома сусідніми вузлами. Фаза коливань точок струни залежить від знаку $\sin(\pi n x/l)$:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \omega_n t + \delta_n, & \text{якщо} \quad \sin(\pi n x/l) > 0, \\ \omega_n t + \delta_n \pm \pi, & \text{якщо} \quad \sin(\pi n x/l) < 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Оскільки функція $\sin(\pi n x/l)$ змінює знак ("$+$" на "$-$" або навпаки) лише у вузлах, то згідно (3.27) всі точки струни між сусідніми вузлами x_k, x_{k+1} коливаються у фазі: в процесі коливання вони одночасно проходять положення рівноваги і одночасно досягають (кожна точка свого) максимального відхилення від положення рівноваги.

Фази коливань точок, що розташовані по різні боки вузла, відрізняються, як видно з (3.27), на $\Delta\varphi = \pm\pi$, тобто такі точки коливаються у протифазі. Вони одночасно проходять положення рівноваги (з протилежними напрямами швидкостей) і одночасно досягають максимального відхилення (але по різні боки) від положення рівноваги. Профіль струни, що коливається за законом (3.25), в будь-який момент часу являє собою синусоїду:

$$u_n(x,t) = \gamma_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{3.28}$$

де $\gamma_n(t) = \alpha_n \cdot \cos(\omega_n t + \delta_n)$. Під час коливання відбувається періодичне перетворення потенціальної енергії струни в кінетичну і навпаки. В момент найбільшого відхилення струни від положення рівноваги кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна досягає свого найбільшого значення. Швидкості всіх точок струни в такий момент дорівнюють нулю.

При проходженні точок струни через положення рівноваги кінетична енергія досягає максимального значення, а потенціальна енергія стає мінімальною.

Знайдемо повну енергію струни, що коливається за законом (3.25). За нульовий рівень потенціальної енергії візьмемо її мінімальне значення. Тоді повна енергія коливань струни дорівнює максимальному значенню кінетичної енергії: $E = E_k^{max}$.

Кінетична енергія струни обчислюється як сума (інтеграл) кінетичних енергій окремих нескінченно-малих елементів струни

$$E_k = \int_0^l \rho \frac{v^2(x)}{2} dx,$$

де ρ – лінійна густина струни (ρdx – маса елемента струни довжиною dx).

Швидкість точок струни

$$v = \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\alpha_n \omega_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin(\omega_n t + \delta_n),$$

а максимальне значення швидкості (за абсолютною величиною) досягається в момент часу, коли $|\sin(\omega_n t+\delta_n)| = 1$. Тоді $|v_{max}(x)| = \alpha_n\omega_n|\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)|$, а максимальне значення кінетичної енергії

$$E_k^{max} = \int_0^l \rho \frac{v_{max}^2(x)}{2} dx = \frac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2}{2}\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx =$$

$$= \frac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2}{2}\,\frac{l}{2} = \frac{M\alpha_n^2\omega_n^2}{4} = \frac{M(A_n^2 + B_n^2)\omega_n^2}{4},$$

де $M = \rho l$ – маса струни.

Таким чином, повна енергія коливань струни $E = E_k^{max} = \frac{1}{4}M(A_n^2 + B_n^2)\omega_n^2$ пропорційна її масі, квадрату амплітуди та квадрату частоти.

Окрему стоячу хвилю з певною частотою ω_n називають *гармонікою*. Отже, розв'язок у вигляді (3.19) задачі про коливання струни являє собою суперпозицію стоячих хвиль, або, інакше кажучи, суперпозицію гармонік. Частоти $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$, що відповідають окремим гармонікам, називаються *власними частотами* коливань струни. Оскільки параметр a, що входить в рівняння (3.1), дорівнює $\sqrt{T/\rho}$, то

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (n = 1, 2, 3, ...). \tag{3.29}$$

Коливання струни сприймається нами завдяки звуку, який видає струна у вигляді накладання простих *тонів*, що відповідають окремим стоячим хвилям. Висота тону залежить від частоти коливань, а сила тону визначається енергією стоячої хвилі, а отже, амплітудою коливань.

Згідно (3.29) самий низький тон, який може утворювати струна, відповідає найменшій з усіх можливих власних частот струни:

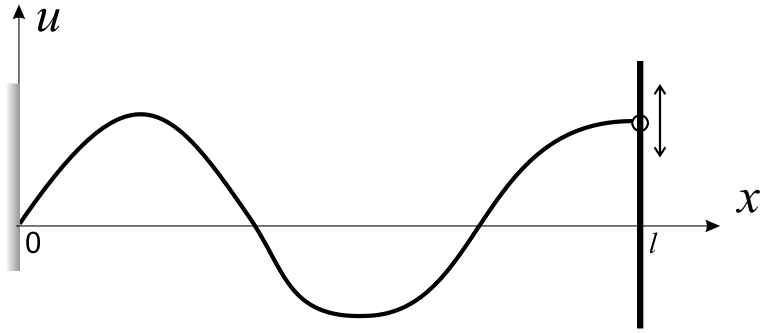
$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \tag{3.30}$$

і називається основним тоном струни. Решта тонів, частоти яких є кратними ω_1, називаються *обертонами*. Тембр звуку залежить від наявності, поряд з основним тоном, обертонів, а також від розподілу енергії по гармоніках. Як видно з (3.30), частота основного тону (а також обертонів) залежить від довжини струни, лінійної густини (або маси) та від сили натягу струни.

Наприкінці зауважимо, що задачі про вільні механічні коливання (повздовжні) в пружньому стержні, коливання повітря в трубці, коливання струму і напруги в провідниках, або про електромагнітні коливання в резонаторах, абсолютно ідентичні щойно розглянутій задачі про поперечні коливання струни. Окремі фрагменти даної задачі повторюються у самих різноманітних задачах теоретичної фізики. Зокрема, в квантовій механіці дискретні значення енергії, моменту кількості руху, тощо виникають в квантовій механіці як власні значення відповідних задач Штурма-Ліувілля.

Залежність розв'язку задачі про коливання струни від вибору крайових умов.

Змінимо тепер крайову умову на одному з кінців струни: вважаємо, що лівий кінець струни залишається закріпленим, а правий кінець – вільним. Слово "вільний" не слід тут розуміти буквально. Дійсно, для того, щоб струна могла коливатись, треба забезпечити натяг струни деякою силою T, що прикладена до кінця струни в *повздовжному* напрямку. Отже, "вільний" в даному випадку означає, що кінець струни може вільно зміщуватись в *поперечному* по відношенню до нейтрального положення струни напрямку, і на кінець струни в поперечному напрямку не діє ніяка сила. Схему реалізації крайових умов такого типу вказано на рисунку:



лівий кінець струни ($x = 0$) закріплений жорстко, а правий за допомогою кільця (масою якого нехтуємо), що може без тертя ковзати вздовж направляючого стержня у вертикальному напрямку. Математичне формулювання даної задачі відрізняється від (3.1)-(3.3) тільки однією крайовою умовою: $u(l,t) = 0$ слід замінити на $u_x(l,t) = 0$, що призводить до заміни відповідної умови $X(l) = 0$ на іншу умову $X'(l) = 0$ в задачі Штурма-Ліувілля (3.9), (3.10). Дотримуючись розглянутої вище схеми розв'язування задачі Штурма-Ліувілля, приходимо до висновку, що при $\lambda < 0$ і $\lambda = 0$ і в даному випадку не існує власних значень (а отже, і власних функцій). При $\lambda > 0$ застосовуємо до загального розв'язку рівняння (3.9)

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

крайові умови $X(0) = 0$, $X'(l) = 0$ і приходимо до системи рівнянь відносно коефіцієнтів A і B:

$$\begin{cases} A = 0, \\ B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\; l) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\lambda > 0$ і $B \neq 0$ (розв'язок нетривіальний), то з другого рівняння системи маємо: $\cos(\sqrt{\lambda}\; l) = 0$ і звідси знаходимо власні значення і власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, \; X_n(x) = \tilde{B}_n \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right), \tag{3.31}$$

$(n = 0, 1, 2, ...)$. Власні частоти струни $\omega_n = \sqrt{\lambda_n} \cdot a = \frac{\pi(2n+1)a}{2l}$ визначаються виглядом рівняння (3.17) з врахуванням нових значень λ_n.

Таким чином, розв'язок задачі про коливання струни у випадку, коли один (лівий) кінець струни закріплений, а другий (правий) вільний, має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right), \tag{3.32}$$

де коефіцієнти ряду обчислюються за формулами:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right) dx.$$

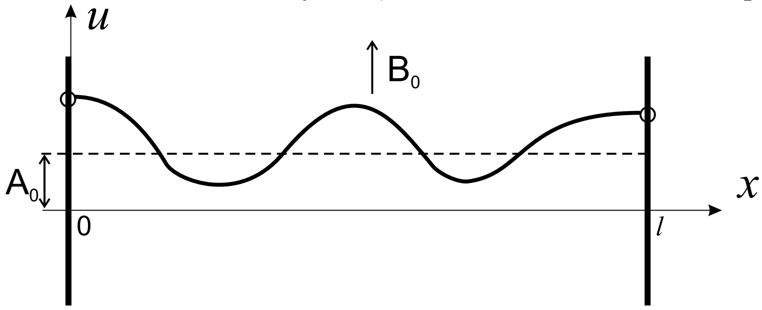
Як і в попередньому випадку (кінці струни закріплені), розв'язок (3.31) являє собою суперпозицію стоячих хвиль або гармонік. Різниця полягає лише в розташуванні вузлів і пучностей, а також в значеннях власних частот струни.

Згідно (3.31) вузли стоячої хвилі з власною частотою ω_n розташовані в точках $x_k = \frac{2k}{2n+1} \cdot l$, $(k = 0, 1...n)$, а пучності в точках $x_m = \frac{2m+1}{2n+1} \cdot l$, $(m = 0, 1...n)$. Отже, при довільному значенні n на лівому кінці струни завжди буде вузол, а на правому – пучність. Найменша частота гармоніки, що задає тон звучання струни, $\omega_0 = \frac{\pi a}{2l}$. Оскільки параметр a має зміст швидкості поширення хвиль в струні, то частоті ω_0 відповідає довжина хвилі $\tilde{\lambda}_0 = \frac{2\pi a}{\omega_0} = \frac{2\pi a}{\pi a/(2l)} = 4l$. Отже, при коливанні з найменшою власною частотою ω_0 на довжині струни вкладається лише чверть довжини хвилі $l = \tilde{\lambda}_0/4$, в той час, як у випадку обох закріплених кінців – половина довжини хвилі. З рівності (3.31) випливає, що всі власні частоти струни кратні найменшій частоті

$$\omega_n = (2n+1)\omega_0,$$

і коефіцієнти кратності є цілими непарними числами.

Коротко обговоримо тепер специфіку задачі з крайовими умовами, що відповідають ситуації, коли обидва кінці струни вільні.



Повторюючи дії, розглянуті раніше, приходимо до задачі Штурма-Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Легко переконатись, що і в даному випадку не існує власних значень і власних функцій при $\lambda < 0$. Розв'язками задачі (3.33) $\lambda > 0$ є власні значення $\lambda_n = (\pi n/l)^2$, яким відповідають власні функції $X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$.

На відміну від двох попередніх варіантів крайових умов, виявляється, що коли обидва кінці струни вільні, то $\lambda = 0$ також є власним значенням. Дійсно, при $\lambda = 0$ задача Штурма-Ліувілля має вигляд:

$$\begin{cases} X''(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння є лінійна функція $X(x) = C + Dx$, а з крайових умов випливає: $X'(0) = D = 0$, $X'(l) = D = 0$. Отже, власному значенню $\lambda = \lambda_0 = 0$ відповідає власна функція $X_0(x) = C$, яка не дорівнює тотожньо нулю. При $\lambda = 0$ рівняння (3.6) набуває вигляду $\ddot{T} = 0$, розв'язками якого є функція

$$T_0(t) = \tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 t.$$

Таким чином, розв'язок задачі про коливання обмеженої струни з вільними кінцями має вигляд

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_0 + B_0 t + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right), \end{aligned} \tag{3.34}$$

де коефіцієнти ряду обчислюються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx, \quad B_n = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x),$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \quad B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Власні частоти коливань струни $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$.

Пояснимо фізичний зміст перших двох доданків в правій частині (3.34). Якщо $\int_0^l \varphi(x)dx \neq 0$, то при $t = 0$ центр мас струни буде зміщений у вертикальному напрямку на величину

$$\tilde{u}_0 = \frac{\int_0^l \rho\varphi(x)dx}{\int_0^l \rho dx} = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx = A_0.$$

Оскільки на струну з вільними кінцями в поперечному напрямку не діють зовнішні сили, то зміщення центру мас залишається постійним в часі і коливання струни відбуваються вже навколо зміщеного положення рівноваги, тобто, до зміщень, пов'язаних з коливаннями, буде додаватись постійне в часі зміщення A_0.

Припустимо тепер, що $\int_0^l \psi(x)dx \neq 00$. Тоді при $t = 0$ імпульс центру мас струни дорівнює $\int_0^l \rho\psi(x)dx$ і, оскільки зовнішні сили (поперечні) відсутні, імпульс струни залишається незмінним, тобто на коливання струни накладається рівномірний рух всієї струни зі швидкістю

$$v_0 = \frac{\int_0^l \rho\psi(x)dx}{\int_0^l \rho dx} = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)dx = B_0.$$

Отже, якщо кінці струни вільні, то для коливань струни, за певних умов, додається зміщення в поперечному напрямку, що залежать від часу за законом $\bar{u} = A_0 + B_0 t$, що і знайшло своє відображення у розв'язку (3.34)

Коливання струни під дією зовнішніх сил.

В попередніх розділах розглянуто вільні коливання струни, тобто коливання спричинені лише внутрішніми силами пружності та силами реакції на кінцях струни в точках її закріплення. Розглянемо тепер процес коливання обмеженої струни під дією заданої сили, що залежить від часу і розподілена по струні з лінійною густиною $F(x,t)$. Сили, прикладені у всіх точках, лежать в одній площині і мають напрям, нормальний до нейтрального положення струни. Зі змісту лінійної густини $F(x,t)$ випливає, що на довільний елемент струни довжиною dx діє елементарна сила $F(x,t)dx$. За відсутності інших сил, даний елемент dx, маса якого дорівнює $dm = \rho dx$, рухався б з прискоренням $f(x,t) = \frac{F(x,t)dx}{dm} = \frac{F(x,t)}{\rho}$. В дійсності в процесі коливання струни на виділений елемент dx діють також змінні сили з боку інших елементів струни, з якими даний елемент знаходиться в контакті. У свою чергу, за третім законом Ньютона, елемент діє на сусідні елементи, і в результаті відбувається самоузгоджений рух усіх елементів струни.

Щоб зосередитись безпосередньо на вивченні саме наслідків дії на струну зовнішньої сили, в даному розділі максимально спростимо задачу. Будемо вважати, що початкові відхилення від положення рівноваги і початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, тобто в момент часу $t = 0$ струна знаходиться в стані спокою в своєму положенні рівноваги. Вважаємо також, що кінці струни жорстко закріплені, оскільки задачу про вільні коливання струни саме з такими крайовими умовами найбільш докладно розглянуто вище.

Математична постановка задачі про коливання обмеженої струни довжиною l під дією зовнішніх сил з врахуванням конкретних умов, сформульованих вище, набуває вигляду:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{3.35}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0; \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

На відміну від рівняння (3.1), що описує динаміку вільних коливань струни, диференціальне рівняння (3.35) є неоднорідним через наявність функції $f(x,t)$, зміст якої вже нами обговорено.

Розв'язок задачі (3.35-3.37) будемо шукати у вигляді ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (3.9),(3.10)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{3.38}$$

Можливість такого розкладу обумовлена повнотою ортогональної послідовності власних функцій $\left\{\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right\}$ в класі непарних обмежених функцій. Отже, довільну функцію $u(x,t)$ (в даному випадку t слід розглядати як параметр) з цього класу можна розкласти в ряд (3.38), і цей ряд збігається рівномірно до функції $u(x,t)$.

Доцільність розкладу саме по функціях $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ випливає з того, що $u(x,t)$, представлена у вигляді ряду (3.38), задовольняє ці умови. Останній фактор є вирішальним при виборі послідовності функцій, за якими розкладається $u(x,t)$. Отже, якщо б, наприклад, в задачі (3.35-3.37) крайові умови (3.36) замінити на інші: $u(0,t)=0$, $u_x(l,t)=0$ (тобто такі що відповідають ситуації, коли лівий кінець струни закріплений, а правий – вільний), то функцію $u(x,t)$ слід було б розкладати по $\left\{\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right)\right\}$, тобто по власним функціям задічі Штурма-Ліувілля, що виникають в задачі про вільні коливання струни, з відповідними крайовими умовами.

Функцію $f(x,t)$ з рівняння (3.35) також представимо у вигляді ряду

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{3.39}$$

обґрунтовуючи таку можливість, як і для розкладу $u(x,t)$, повнотою послідовності функцій $\left\{\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right\}$. Коефіцієнти $f_n(t)$ в (3.39) знаходимо абсолютно так само, як і коефіцієнти A_n в розкладі (3.20):

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,$$

або зважаючи на подальше користування цим виразом перепишемо його з іншими позначеннями змінної інтегрування:

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)d\xi. \tag{3.40}$$

Диференціюючи почленно ряд (3.38) по x і по t, знаходимо другі частинні похідні функції $u(x,t)$

$$u_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{u}_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),$$

$$u_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

і підставимо вирази в рівняння (3.35). В результаті, після елементарних перетворень, маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{u}_n(t)+\omega_n^2 u_n(t)-f_n(t)\right\}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)=0, \tag{3.41}$$

де $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$.

Ліву частину рівності (3.41) можна розглядати як лінійну суперпозицію функцій $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ з коефіцієнтами $C_n(t) = \ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t)$, що залежать від змінної t, як від параметра.

Оскільки функції $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ з різними значеннями n є лінійно незалежними (бо ортогональні функції є лінійно незалежними завжди), то тотожна рівність нулю суми (3.41) можлива тоді і тільки тоді, коли кожний з коефіцієнтів $C_n(t)$ дорівнює нулю. Звідси маємо:

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Підпорядковуючи функцію $u(x,t)$ у вигляді розкладу (3.38) однорідним початковим умовам (3.37), отримаємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = 0$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = 0.$$

Звідси, на підставі, знову ж таки, лінійної незалежності функцій $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$, випливає: $u_n(0) = 0$, $\dot{u}_n(0) = 0$. Таким чином, для знаходження функцій $u_n(t)$ приходимо до необхідності розв'язання задачі Коші:

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t), \quad t > 0, \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} u_n(0) = 0, \\ \dot{u}_n(0) = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами (3.42), з початковими умовами (3.43) можна розв'язати, наприклад, операційним методом.

Застосуємо перетворення Лапласа до функцій $u_n(x,t)$ та $f_n(t)$:

$$u_n(t) \risingdotseq U_n(p), \quad f_n(t) \risingdotseq F_n(p).$$

Тоді, з врахуванням початкових умов (3.43): $\ddot{u}_n(t) \risingdotseq p^2 U_n(p)$, перетворене рівняння набуває вигляду

$$p^2 U_n(p) + \omega_n^2 U_n(p) = F_n(p).$$

Звідси зображення Лапласа шуканої функції можна представити у вигляді

$$U_n(p) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\omega_n}{p^2 + \omega_n^2} F_n(p). \tag{3.44}$$

Оскільки $U_n(p) \risingdotseq u_n(t)$; $\frac{\omega_n}{p^2+\omega_n^2} \risingdotseq \sin\omega_n t$; $F_n(p) \risingdotseq f_n(t)$, то з (3.44) оберненим перетворенням Лапласа знаходимо:

$$u_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)f_n(\tau)d\tau. \qquad (3.45)$$

Тут функція $u_n(t)$ представлена у вигляді згортки, оскільки її зображення Лапласа $U_n(p)$ є добутком двох зображень.

Враховуючи (3.40), вираз (3.45) запишемо у вигляді:

$$u_n(t) = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^t \int_0^l \sin\omega_n(t-\tau)\sin\left(\frac{\pi n\xi}{l}\right)f(\xi\tau)d\tau d\xi. \qquad (3.46)$$

Підставивши отриманий вираз для $u_n(t)$ в розклад (3.38), змінимо послідовність операцій підсумовування і інтегрування і запишемо остаточний вираз для розв'язку задачі (3.35-3.37) про коливання обмеженої струни під впливом зовнішніх сил:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi;t-\tau)f(\xi\tau)d\tau d\xi, \qquad (3.47)$$

де

$$G(x,\xi;t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\sin\left(\frac{\pi n\xi}{l}\right).$$

Функція $G(x,\xi;t-\tau)$ має назву *функції впливу точкового джерела*, або *функції Гріна*. З'ясуємо фізичний зміст цієї функції.

Припустимо, що протягом певного часу, починаючи з моменту $t=0$, на струну не діють зовнішні сили, а потім в деякий момент часу $t=t'$ до струни прикладається сила миттєвої дії в малому околі точки з координатою x'. Тоді лінійну частину розподілу сили $F(x,t)$ можна змоделювати за допомогою δ-функції Дірака:

$$F(x,t) = C\delta(x-x')\delta(t-t'), \qquad (3.48)$$

де C – деяка константа, яка певним чином характеризує інтенсивність прикладеної до струни сили.

Знайдемо значення імпульсу, що передано струні:

$$P = \int_0^l \int_0^\infty F(x,t)dxdt = C\int_0^l \int_0^\infty \delta(x-x')\delta(t-t')dxdt = C.$$

Отже, константа C, що входить в (3.48), має зміст імпульсу, що передається струні в цілому шляхом миттєвої дії сили (3.48). Функція $f(x, t)$, що входить в (3.35) пов'язана з $F(x, t)$ простим співвідношенням вигляду:

$$f(x,t) = \frac{P}{\rho}\delta(x - x')\delta(t - t'). \tag{3.49}$$

Підставимо цю функцію в підінтегральний вираз рівності (3.47):

$$u(x,t) = \frac{P}{\rho}\int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\delta(\xi - x')\delta(\tau - t')d\tau d\xi.$$

Оскільки $x' \in (0, l)$, то на підставі відомої властивості δ-функції, в результаті інтегрування по ξ отримаємо

$$u(x,t) = \frac{P}{\rho}\int_0^t G(x,x',t-\tau)\delta(\xi - x')\delta(\tau - t')d\tau d\xi.$$

Якщо $t < t'$, то $t' \notin (0, t)$ і, отже, інтеграл дорівнює нулю, оскільки $\delta(\tau - t')$ дорівнює нулю на всьому проміжку інтегрування.

При $t > t'$, $t' \in (0, t)$ і тоді

$$\int_0^t G(x,x';t-\tau)\delta(\tau - t')d\tau = G(x,x';t-t').$$

Таким чином, коливання струни під впливом миттєвої точкової дії на струну силою (3.48), відображається функцією

$$F(x,t) = \begin{cases} 0, & t < t' \\ \frac{P}{\rho}G(x,x';t-t'), & t > t'. \end{cases} \tag{3.50}$$

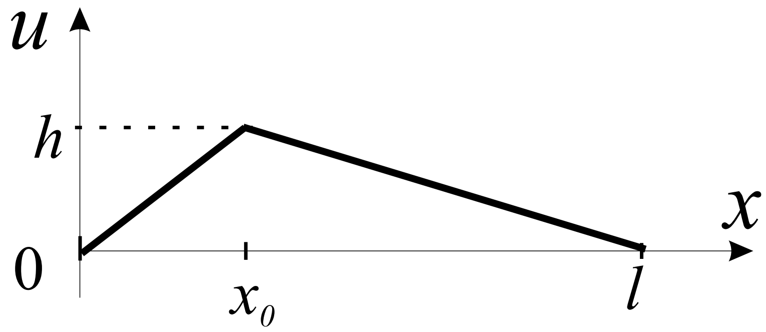
Рівність нулю функції $u(x, t)$ при $t < t'$ має просте пояснення: оскільки від початку відліку часу $t = 0$ до моменту $t = t'$ на струну не діяли зовнішні сили (нагадаємо, що відповідно до початкових умов (3.37), початкові відхилення та початкові швидкості точок струни також дорівнюють нулю), то до початку дії сил струна залишається в стані спокою.

Якщо $P/\rho = 1$ (в певних одиницях виміру), то коефіцієнт при δ-функціях в (3.49) дорівнює одиниці, а тоді відповідний коефіцієнт в (3.50) також дорівнює одиниці.

Вираз (3.50) дозволяє надати функції впливу точкового джерела певне фізичне тлумачення, а саме: функція $G(x, x'; t - t')$ описує при $t > t'$ коливання струни, якщо в момент часу $t = t'$ подіяли миттєвою точковою силою, яка передає струні імпульс P, числове значення якого дорівнює ρ.

Рівняння гіперболічного типу.

3.1. Знайти закон вільних коливань струни на відрізку $x \in [0, l]$, якщо кінці струни жорстко закріплені, початкова швидкість дорівнює нулю, початкове зміщення (а) має форму, зображену на рисунку; (б) описується формулою $u(x,0) = \frac{l}{100}\sin(\pi x/l)$.



3.2. Струна довжиною l з жорстко закріпленими кінцями збуджується в початковий момент часу ударом плоского молоточка, що надає швидкість v_0 точкам струни на відрізку $0 < x_1 \leq x \leq x_2 < l$. Знайти відхилення струни від положення рівноваги, якщо початкове зміщення дорівнює нулю.

3.3. Розв'язати задачу про коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями, що збуджується ударом тоненького молоточка в точці $x = x_0$, що передає струні імпульс I. Початкова швидкість дорівнює нулю.

3.4. Розв'язати задачу про повздовжні коливання в пружньому стержні довжиною l з вільними кінцями, якщо початкові зміщення і початкові швидкості в повздовжньому напрямку довільні. Врахувати можливість рівномірного поступального руху стержня.

3.5. Розв'язати задачу про повздовжні коливання стержня довжиною l при початкових умовах $u(x,0) = kx$, $u_t(x,0) = 0$, якщо кінець $x = 0$ закріплений, а кінець $x = l$ вільний.

3.6. Знайти повздовжні зміщення точок стержня, якщо кінець $x = 0$ закріплений пружньо, а кінець $x = l$ вільний. Пружнє закріплення означає, що на кінець діє повздовжня сила, пропорційна зміщенню і направлена в протилежному напрямку.

3.7. До стелі ліфта, що рівномірно рухається із швидкістю v_0, жорстко закріплений стержень кінцем $x = 0$, при цьому кінець $x = l$ вільний. Знайти повздовжні коливання стержня після миттєвої зупинки ліфта. Положення стержня – вертикальне

3.8. Знайти відхилення від положення рівноваги прямокутної мембрани із сторонами x_1, y_1, якщо краї мембрани жорстко закріплені. Початкові умови – довільні: $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$.

3.9. Розв'язати задачу про коливання мембрани, що має форму рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами рівними l. Краї мембрани закріплені. Початкові умови – довільні: $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$.

3.10. Розв'язати задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx} + A\mathrm{sh}(kx)$ для $t > 0$, $x \in [0, l]$ із нульовими початковими і крайовими умовами.

3.11. Знайти коливання струни довжиною l під дією зовнішньої сили з лінійною густиною $F(x) = f_0 x(l - x)t^2$. Відхилення і швидкості точок струни в початковий момент часу дорівнюють нулю.

Рівняння параболічного типу.

Приклад 3

Розв'язати крайову задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta u$$

$u(0, t) = u_x(l, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}$, $x \in (0, l), t > 0$.

Будемо шукати розв'язок у вигляді: $u(x, t) = e^{-\beta t} v(x, t)$. Підставививши в рівняння, початкові і крайові умови цей вираз отримаємо для функції $v(x, t)$ однорідну крайову задачу:

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

$v(0, t) = v_x(l, t) = 0$, $v(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}$, $x \in (0, l), t > 0$.

Будемо розв'язувати цю задачу методом розділення змінних, представляючи розв'язок у вигляді $v(x, t) = X(x)T(t)$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \mu,$$

де μ – деяка константа.

Для функції $X(x)$ використовуючи крайові умови, отримаємо задачу Штурма-Ліувіля:

$$X''(x) - \mu X(x) = 0; \tag{3.51}$$

$$X(0) = 0; \quad X'(l) = 0, \tag{3.52}$$

Розглянемо всі можливі значення константи μ.

- при $\mu = \lambda^2 > 0$ загальний розв'язок рівняння має вигляд $X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$. Далі накладаємо крайові умови (3.52) $X(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$, $X'(l) = \lambda A \left(e^{\lambda l} - (-\lambda)e^{-\lambda l}\right) = 0$. Задовольнити цю умову можна лише при $A = 0$. Таким чином для випадку $\mu > 0$ маємо лише тривіальний розв'язок.
- при $\mu = 0$ підставляємо загальний розв'язок $X(x) = Ax + B$ в умови (3.52), звідки отримаємо $X(0) = B = 0$, $X'(l) = A = 0$, тобто і для випадку $\mu = 0$ також можливий лише тривіальний розв'язок.
- при $\mu = -\lambda^2 < 0$ загальний розв'язко $X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$, з крайових умов знаходимо $X(0) = B = 0$, $X'(l) = A\lambda\cos\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де n – ціле число. Таким чином, власні значення задачі Штурма Ліувілля мають вигляд: $\mu_n = -\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2$, а власні функції, відповідно, $X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}$.

Розв'яжемо тепер рівняння для функції $T(t)$:

$$\dot{T}_n(t) = a^2\mu_n T_n(t) \Rightarrow T_n(t) = C_n e^{-\gamma_n t}, \gamma_n = \frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}.$$

Загальний розв'язок крайової задачі має вигляд:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\gamma_n t} \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l} \tag{3.53}$$

Коефіцієнти B_n знаходимо, накладаючи початкову умову:

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l} = \sin\frac{\pi x}{2l} \Rightarrow B_k = 0, k \neq 0, B_0 = 1.$$

Остаточно маємо відповідь:

$$u(x,t) = e^{-\beta t} v(x,t) = e^{-\beta t - \frac{\pi^2 a^2}{4l^2}t} \sin\frac{\pi x}{2l}.$$

3.12. Знайти розподіл температури всередині тонкого стержня $x \in [0, l]$ із теплоізольованою бічною поверхнею, якщо

(а) температура його кінців підтримується рівною нулю;

(б) температура кінця $x = 0$ підтримується рівною нулю, а кінець $x = l$ – теплоізольований;

(в) обидва кінці стержня теплоізольовані. Початкова температура $u(x, 0) = f(x)$. Розглянути випадок $f(x) = u_0 =$const.

3.13. Знайти розподіл температури всередині тонкого стержня $x \in [0, l]$ із теплоізольованою бічною поверхнею, якщо температура кінця $x = 0$ підтримується рівною нулю, а на кінці $x = l$ температура змінюється за законом $u(l, t) = Ae^{-\gamma t}$. Початкова температура всередині стержня: $u(x, 0) = Ax/l$.

3.14. Знайти температуру в тонкому однорідному кільці довжиною l, якщо бічна поверхня кільця теплоізольована, а початковий розподіл температури в кільці довільний: $u(x, 0) = f(x)$

3.15. Визначити критичну товщину шару, в якому відбувається дифузія частинок із розмноженням.

(а) Концентрація частинок на верхній і нижній поверхні нульова.

(б) Потік частинок через нижню поверхню шару дорівнює нулю, а на верхній поверхні концентрація нульова. Початковий розподіл концентрації всередині шару – довільний.

3.16. Визначити критичні розміри кубу, якщо всередині відбувається дифузія частинок із розмноженням. Концентрація частинок на поверхні нульова. Початковий розподіл концентрації $u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$.

3.17. Визначити критичні розміри кулі, якщо всередині відбувається дифузія частинок із розмноженням. Концентрація частинок на поверхні нульова. Початковий розподіл частинок залежить лише від відстані до центру кулі: $u(r, 0) = f(r)$.

3.18. Розв'язати задачу про охолодження кулі радіусу r_0, якщо в початковий момент часу розподіл температури залежав лише від відстані до центру кулі: $u(r, 0) = f(r)$.

(а) На поверхні кулі підтримується нульова температура;

(б) Поверхня кулі підтримуються при сталій температурі $u_0 =$const;

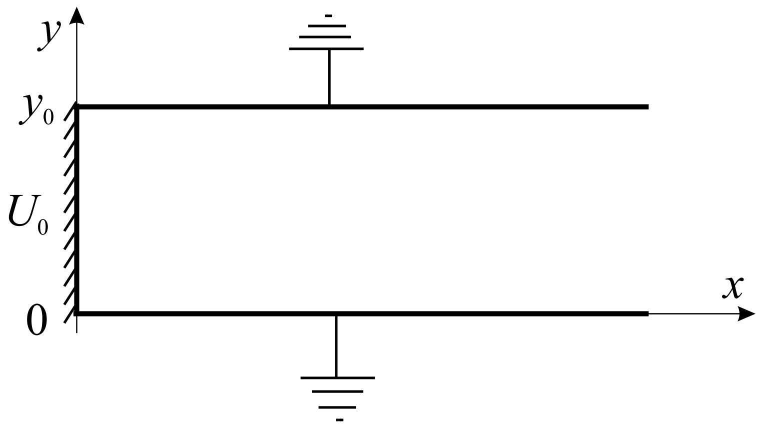
(в) Поверхня кулі вільно охолоджується за законом Ньютона в середовищі з нульовою температурою.

3.19. Бічна поверхня кулі радіусу r_0 опромінюється однорідним потоком тепла густиною q. Знайти температуру всередині кулі при $t > 0$, якщо в початковий момент часу температура кулі дорівнювала нулю.

Рівняння еліптичного типу.

Приклад 4

Знайти електростатичний потенціал всередині області між провідними пластинами $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0$, якщо пластина $x = 0$ має потенціал $u(0, y) = U_0 = A(y_0 - y)y/y_0^2$ а пластини $y = 0$ та $y = y_0$ заземлені (див. рисунок). Всередині області відсутні вільні заряди.



Крайова задача для електростатичного потенціалу $u(x, y)$ має вигляд:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$u(0, y) = A(y_0 - y)y/y_0^2$, $u(\infty, y) = 0$, $u(x, 0) = u(x, y_0) = 0$, $x \in (0, \infty), y \in (0, y_0)$.

Після розділення змінних отримаємо:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu.$$

Для функції $Y(y)$ отримаємо задачу Штурма-Ліувілля, аналогічну до роглянутої в Прикладі 2. Тому можна одразу написати власні функції і власні значення цієї задачі: $\mu_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $Y_n(y) = A_n \sin(\pi n y/y_0)$. Відповідне рівняння для $X(x)$ має вигляд:

$$X_n''(x) - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n(x) = 0,$$

Загальний розв'язок цього рівняння: $X_n(x) = B_n e^{-\pi n x/y_0} + C_n e^{\pi n x/y_0}$. Із крайової умови при $x \to \infty$ можна визначити одну з констант: $X_n(\infty) = 0 \Rightarrow C_n = 0$.

Таким чином, маємо загальний розв'язок:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi n x/y_0} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{3.54}$$

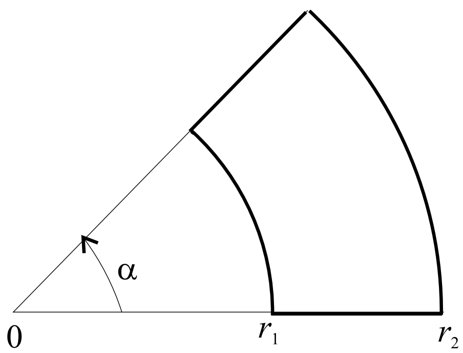
Накладаючи умову $u(0,y) = U_0$ і використовуючи результати задачі Прикладу 2, остаточно отримаємо:

$$u(x,y) = \frac{8A}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} e^{-(2m+1)\pi x/y_0} \sin\frac{(2m+1)\pi x}{l}.$$

3.20. Знайти електростатичний потенціал всередині паралеліпіпеду із провідними бічними гранями, якщо одна грань має потенціал u_0=const, а всі інші грані заземлені.

3.21. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного циліндру радіусу r_0, якщо половина циліндра $\varphi \in [0, \pi]$ має температуру поверхні, рівну U_1, а друга половина – температуру U_2.

3.22. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині кільцевого сектора $r_1 < r < r_2$, $0 < \varphi < \alpha$, якщо температура на границях задається рівностями: $u(r,0) = u(r,\alpha) = u(r_1,\varphi) = 0$, $u(r_2,\varphi) = f(\varphi)$.



3.23. Знайти потенціал зовні нескінченного провідного заземленого циліндру радісу r_0, що знаходиться в однорідному електричному полі $\vec{E}_0$, направленому перпендикулярно до осі циліндру. Визначити поверхневу густину зарядів на циліндрі.

3.24. Нескінчений провідний циліндр знаходиться в зовнішньому однорідному електричному полі $\vec{E}_0$, направленому вздовж осі x. Твірна циліндру паралельна осі z. Знайти густину поверхневого заряду на циліндрі.

3.25. Знайти стаціонарний розподіл температури в твердому тілі, що обмежене нескінченними коаксіальними циліндричними поверхнями із радіусами r_1 і r_2 ($r_1 < r_2$), якщо на поверхні внутрішнього циліндру підтримується постійна температура u_0. Половина $0 \le \varphi \le \pi$ зовнішнього циліндру підтримується при нульовій темпрературі, а інша половина $\pi < \varphi \le 2\pi$ – при температурі u_0.

4. Задачі з використанням δ-функцій.

4.1. Записати об'ємну густину заряду в декартовій, циліндричній або сферичній системі координат для випадку, коли заряд рівномірно розподілений по поверхням або вздовж ліній:

(а) Для кулі радіусу R із поверхневою густиною σ.

(б) Для півкулі радіусу R із поверхневою густиною σ.

(в) Тонке кільце радіусу R, що знаходиться в площині (x, y). Лінійна густина заряду γ.

(г) Напівкільце радіусу R, лінійна густина заряду γ.

(д) Тонкий стержень довжиною l, що розташований вздовж додатньої частини осі z. Лінійна густина заряду γ.

(е) Тонкий диск радіусу R, що лежить в площині (x, y), заряджений з поверхневою густиною σ.

(ж) Циліндрична поверхня радіусу R і висотою h, заряджена з поверхневою густиною σ. Основа циліндру розташована в площині (x, y).

4.2. Довести рівності:

$$\text{(а)}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\delta(x); \qquad \text{(б)}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\pi}\frac{x^2\varepsilon}{(x^2+\varepsilon^2)^2}=\delta(x)$$

$$\text{(в)}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\pi}\frac{x\varepsilon}{(x^2+\varepsilon^2)^2}=-\frac{d\delta(x)}{dx}; \quad \text{(д)}\ x\frac{d\delta(x)}{dx}=-\delta(x);$$

(е) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos(nx)}{\pi n x^2} = \delta(x)$; (ж) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk = \delta(x)$

4.3. Довести, що для будь-якої гладкої функції $f(x)$ має місце рівність:

$$f(x)\frac{d\delta(x-a)}{dx} = f(a)\frac{d\delta(x-a)}{dx} - \delta(x-a)\frac{df(x)}{dx}$$

4.4. Довести, що якщо $f'(a_n) \neq 0$, де $\{a_n\}$ – множина нулів функції $f(x)$: $f(a_n) = 0$, то

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-a_n)}{|f'(a_n)|}$$

5. Метод розділення змінних з використанням спеціальних функцій.

Задачі з використанням циліндричних функцій.

5.1. Знайти вираз для електростатичного потенціалу всередині циліндру радіусу r_0 та висотою h, якщо бічна поверхня і верхня основа заземлені, а нижня основа має постійний потенціал u_0.

5.2. Температура нижньої основи і бічної поверхні циліндру дорівнює нулю. Радіус циліндру r_0, висота дорівнює h. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині циліндру. Якщо температура верхньої основи (а) має аксіально-симетричний розподіл: $u(r,h) = f(r)$; (б) має розподіл, що задається формулою: $u(r,\varphi,h) = f(r,\varphi)$.

5.3. Знайти критичний радіус нескінченно довгого циліндру, в якому відбувається дифузія частинок з розмноженням. Концентрація частинок на поверхні циліндру дорівнює нулю.

5.4. Розв'язати задачу про поперечні коливання мембрани, що має форму кола. Край мембрани закріплений. Початковий розподіл швидкостей і зміщень є радіально-симетричним.

5.5. (а) Довести

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n, \quad \text{де } J_n(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}.$$

(б) Розглянувши добуток твірних функцій $g(x,t)g(-x,t)$, довести що

$$1 = J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_n^2(x), \quad |J_0(x)| \le 1; \; |J_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(в) Використовуючи властивості твірних функцій $g(x+y,t) = g(x,t)g(y,t)$, довести

$$J_n(x+y) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x)J_{n-s}(y).$$

5.6. Знайти електростатичний потенціал всередині циліндричної коробки радіусу r_0 висотою h, якщо верхня і нижня основа заземлені, а бічна поверхня заряджена до потенціалу u_0. Визначити напруженість поля на осі циліндру.

Задачі з використанням поліномів Лежандра і сферичних функцій.

5.7. Знайти електростатичне поле точкового заряду q в присутності провідної заземленої кулі радіусу r_0

(а) заряд знаходиться на відстані $a > r_0$ від центру кулі, знайти потенціал зовнє кулі;

(б) заряд знаходиться на відстані $a < r_0$ від центру кулі, знайти потенціал всередині кулі.

5.8. Знайти потенціал в області між двома концентричними провідними заземленими кулями ($r_1 < r < r_2$, де r_1, r_2 – радіуси куль), якщо на відстані a ($r_1 < a < r_2$) розташований точковий заряд q.

5.9. Сферична посудина з твердими стінками, наповнена газом, тривалий час рухалась рівномірно із швидкістю v_0. В момент часу $t = 0$ вона миттєво зупинилась і залишалась нерухомою. Знайти коливання, що встановились всередині посудини.

5.10. Тверда куля рухається з постійною швидкістю v_0 в нестисливій рідині, що знаходится у спокої на далеких відстанях від кулі. Радіус кулі r_0. Знайти потенціал швидкостей рідини.

5.11. Знайти електростатичний потенціал зовні провідної заземленої кулі радіусу r_0, що знаходится в зовнішньому однорідному електричному полі $\vec{E}_0$.

5.12. Обчислити $P_n(0)$, $P_n(1)$.

5.13. Обчислити

$$\text{(а)} \int_0^1 xP_n(x)dx;$$

$$\text{(б)} \int_0^1 P_n(x)dx.$$

5.14. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині півкулі радіусу r_0, якщо сферична частина поверхні півкулі підтримується при сталій температурі u_0, а основа має нульову температуру.

5.15. Знайти гармонійну функцію всередині кулі радіусу r_0, що набуває на поверхні значення: $u(r_0, \theta) = \cos^2\theta$.

5.16. Розв'язати задачу про охолодження кулі радіусу r_0, якщо початковий розподіл температури заданий: $u(r, \theta, \varphi, 0) = f(r, \theta, \varphi)$.

(а) На поверхні кулі підтримується нульова температура.

(б) На поверхні кулі підтримується стала температура u_0.

(в) Поверхня кулі вільно охолоджується в середовищі із нульовою температурою.

5.17. Знайти температуру всередині сферичної оболонки між двома концентричними сферичними поверхнями ($r_1 < r < r_2$). Початковий розподіл температури заданий: $u(r, \theta, \varphi, 0) = f(r, \theta, \varphi)$.

(а) Температура на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки підтримується рівною нулю.

(б) Зовнішня поверхня охолоджується в середовищі з нульовою температурою, а внутрішня поверхня опромінюється рівномірним потоком тепла з густиною Q.

5.18. Розкласти плоску хвилю $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ по поліномам Лежандра і функціям Беселя.

5.19. Розв'язати задачу про розсіяння плоскої акустичної хвилі на твердому циліндрі радіусу r_0. Твірна циліндру паралельна хвильовій поверхні плоскої хвилі.

5.20. Розв'язати задачу про розсіяння плоскої акустичної хвилі на твердій кулі радіусу r_0.

6. Інтегральні рівняння.

6.1. Розв'язати інтегральне рівняння методом послідовних наближень:

$$\begin{aligned}
\text{(а) } \varphi(x) &= 1 - 2\int_0^x t\varphi(t)dt; \\
\text{(б) } \varphi(x) &= x - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

6.2. Розв'язати інтегральне рівняння з виродженим ядром:

$$\begin{aligned}
\text{(а) } \varphi(x) &= 1 + \lambda\int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt; \\
\text{(б) } \varphi(x) &= -x^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-t^2}\varphi(t)dt; \\
\text{(в) } \varphi(x) &= -x^2 + \int_{-1}^1 x^2t^2\varphi(t)dt; \\
\text{(г) } \varphi(x) &= x^3 + \lambda\int_0^1 (1+x^2t^2)\varphi(t)dt; \\
\text{(д) } \varphi(x) &= e^x + 2\lambda\int_0^1 e^{x+t}\varphi(t)dt; \\
\text{(е) } \varphi(x) &= e^x + \lambda\int_0^1 e^{x-t}(1+xt)\varphi(t)dt; \\
\text{(ж) } \varphi(x) &= x^2 + x^4 + \lambda\int_{-1}^1 (xt+x^2t^2)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

6.3. Розв'язати інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned}
\text{(а) } \varphi(x) &= \pi - 2x + \lambda\int_0^\pi \sin(2x+t)\varphi(t)dt; \\
\text{(б) } \varphi(x) &= \cos 3x + \int_0^{2\pi} (\cos x\cos t + \cos 2x\cos 2t)\varphi(t)dt; \\
\text{(в) } \varphi(x) &= \cos x + \int_0^{2\pi} (\cos x\cos t + 2\sin 2x\sin 2t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

6.4. Розв'язати інтегральне рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt + a\sin x + b$$

для всіх λ, та всіх значень параметрів a,b.

6.5. Знайти всі значення параметрів a, b, c, при яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c + \lambda \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\varphi(t)dt$$

має розв'язки при будь-яких λ.

6.6. Знайти власні значення і власні функції виродженого ядра $K(x,t) = t + x$ на проміжку $[-1, 1]$.

6.7. Знайти власні значення і власні функції ядра $K(x,t)$ на проміжку $[0, 2\pi]$:

(а) $K(x,t) = \cos(t - x)$;

(б) $K(x,t) = \frac{1}{2} + \sin(x + t)$.

6.8. Знайти власні значення і власні функції ядра $K(x,t)$ на проміжку $[0, 1]$:

(а) $K(x,t) = x^2t^2 - \frac{2}{45}$;

(б) $K(x,t) = (x/y)^{2/5} + (y/x)^{2/5}$.

6.9. Побудувати резольвенту ядра $K(x,t)$ інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt,$$

якщо

(а) $K(x,t) = e^{x-t}$;

(б) $K(x,t) = xt$;

(в) $K(x,t) = 1$.

6.10. Знайти резольвенту і розв'язати інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} &(а) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt; \\ &(б) \quad \varphi(x) = f(x) + \int_{-\pi}^{+\pi} (x\sin t + \cos t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

6.11. Використовуючи перетворення Фур'є розв'язати інтегральні рівняння:

$$(а) \quad \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = e^{-\frac{1}{2}x^2};$$

(б) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

6.12. Розв'язати інтегральне рівняння Урисона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(x-t)dt = e^{-x^2}$$

Бібліоґрафія

[1] Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов Сборник задач по математической физике, -М.: Наука, 1956.

[2] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики, -М.: Наука, 1972.

[3] В.Я. Арсенин. Методы математичекской физики и специальные функции, -М.: Наука, 1974.

[4] И.В. Колоколов, Е.А. Кузнецов, А.И. Мильштейн, Е.В. Подивилов, А.И. Черных, Д.А. Шапиро, Е.Г. Шапиро Задачи по математическим методам физики, -М.: Эдиториал УРСС, 2000. -288 с.

[5] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат Методы функций комплексного переменного, -М.: Наука, 1957.