Даний посібник містить задачі з математичного аналізу, які пропонуються протягом останніх декількох років студентам фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка для додаткової самостійної роботи. При цьому ставиться завдання поглиблення знань студентів з математичного аналізу та розвиток їх творчих здібностей за рахунок розв'язування складніших задач.

Частину запропонованих задач взято з відомих підручників та задачників (в основному з [1] та [4]), решта є оригінальними.

Кожну задачу в залежності від рівня її складності оцінено певною кількістю балів. Хоча значна частина завдань має підвищений рівень складності, проте для їх розв'язання досить теоретичних знань, отриманих на лекціях або з стандартних підручників з математичного аналізу рівня [2] або [3].

Всі завдання розділено на п'ять модулів, які студенти виконують і здають паралельно до вивчення відповідного теоретичного матеріалу. Перші два модулі виконуються в першому семестрі, третій — в другому, два останніх — в третьому. Орієнтовний графік складання модулів:

1) вступ до аналізу, границя, похідна — до 15 листопада;
2) інтеграл — до 25 грудня;
3) частинні похідні; кратні й криволінійні інтеграли — до 15 травня;
4) ряди та інтеграли з параметром — до 15 грудня;
5) функціональні простори — до 25 грудня.

Окремий модуль складають задачі з теорії функцій комплексної змінної, які враховуються у відповідному курсі.

Результати цієї роботи безпосередньо враховуються при обчисленні підсумкових семестрових оцінок з математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної. Але оскільки ці задачі є додатковими до звичайної загальної програми, то за них доцільно братися лише тим студентам, які впевнено справляються з цією загальною програмою. Відповідно ці додаткові задачі приймаються та бали за їх виконання зараховуються лише тим студентам, поточна оцінка з математичного аналізу у яких — не нижче міцного "добре" (це приблизно 80–85 балів за 100-бальною шкалою).

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

§1. Вступ до аналізу

1. Обчислити вказані добутки, після чого додатково довести отримані рівності методом математичної індукції:

$$\text{а)}\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\quad [2]\ ;\qquad \text{б)}\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)\quad [2]\ .$$

2. Обчислити вказані суми:

$$\text{а)}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\quad [1]\ ;\qquad \text{б)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\quad [3]\ ;$$

$$\text{в)}\ \sum_{k=1}^{n}k^2\ \text{ та }\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2\quad [3]\ ;\qquad \text{г)}\ \sum_{k=1}^{n}k^3\ \text{ та }\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^3\quad [6]\ ;$$

$$\text{д)}\ \sum_{k=0}^{n}C_n^k\ \text{ та }\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\quad [2]\ ;\qquad \text{е)}\ \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}\quad [6]\ ;$$

$$\text{є)}\ \sum_{k=1}^{n}k\cdot k!\quad [2]\ ;\qquad \text{ж)}\ \sum_{k=0}^{n}C_N^k\,C_M^{n-k}\quad [6]\ .$$

3. Вивести формули для сум $1+11+...+1...1$ та $3+33+...+3...3$, де кожна сума містить n доданків (тобто останній доданок має n відповідних однакових цифр). [3]

4. Вивести формулу $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}} = 2\cos(\pi/2^{n+1})$ (в лівій частині маємо n коренів) з відомих тригонометричних рівностей, після чого додатково довести її методом математичної індукції. [3]

5. За допомогою методу математичної індукції довести, що для будь-яких додатних $x_1,\ldots,x_n$ з умови $x_1\ldots x_n = 1$ випливає $x_1+\ldots+x_n \geq n$, причому рівність буде тоді й тільки тоді, коли $x_1 = \ldots = x_n$. Звідси отримати нерівність між середнім геометричним $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ та середнім арифметичним $(x_1+\ldots+x_n)/n$ довільних додатних чисел

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\ ,$$

де рівність буде тоді й тільки тоді, коли $x_1 = \ldots = x_n$. [6]

6. За допомогою нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним довести, що при $n > 1$ виконано $n! < [\,(n+1)/2\,]^n$. [1]

7. За допомогою методу математичної індукції довести такі нерівності:

а) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24} \quad (n > 1)$ [2] ;

б) $\sqrt{n} \;<\; 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} \;<\; 2\sqrt{n} \quad (n > 1)$ [3] ;

в) $n^{n/2} < n! < (n/2)^n, \quad (n > 5)$ [5] .

8. За допомогою методу математичної індукції довести, що для будь-якого простого $p \in \mathbb{N}$ вираз $n^p - n$ ділиться на p. [4]

9. Довести, що послідовність, яку задано рівністю $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n/2^n$, є обмеженою при будь-яких значеннях x_1, $x_2 > 0$. [7]

10. Довести, що всі елементи послідовності, заданої рекурентною рівністю $x_{n+1} = (k + x_n^2)/x_{n-1}$, де $x_0 = x_1 = 1$, є цілими числами при будь-якому натуральному k. [10]

11. За допомогою комплексних чисел й формули Муавра для z^n:

а) виразити $\sin nx$ та $\cos nx$ через $\sin x$ та $\cos x$ [3] ;

б) обчислити суми $\sum_1^n \sin kx$ та $\sum_1^n \cos kx$ [3] .

12. Обчислити суму $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} (1 - z_j)^{-1}$, де z_j є коренями рівняння $z^n = 1$, відмінними від одиниці. [6]

13. Обчислити добуток $(x_1^2 + 1) \ldots (x_n^2 + 1)$, де $x_1, \ldots, x_n$ є коренями рівняння $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, якщо всі ці корені є дійсними. [6]

§2. Границі послідовностей та функцій

14. Довести, що послідовність x_n має границю, та знайти цю границю:

а) $x_n = \sum_1^n (k \cdot k!) \,/\, (n+1)!$ [2] ;

б) $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}$ (n коренів, $a > 0$) [5] ;

в) $x_n = 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}$ (довести, що ця послідовність монотонна та обмежена) [6] ;

г) $x_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\sqrt{n+1}}}}$ [15] . .

15. Використовуючи рівність $e = 2 + 1/2! + \ldots + 1/n! + \theta_n/(n+1)!$, де $0 < \theta_n < 3$, обчислити границі послідовностей:

а) $x_n = \sin(2\pi e n!)$ [3] ; б) $x_n = n\sin(2\pi e n!)$ [5] .

16. Довести рівність $e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\theta_n}{n \cdot n!}$, де $0 < \theta_n < 1$. [6]

17. Використовуючи рівність, отриману в попередній задачі, довести ірраціональність числа e. [2]

18. Обчислити границі послідовностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\sqrt{k}\right|$ [5] ; б) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} 2^{-k}\cos\sqrt{k/n}$ [5] ;

в) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} 2^{-kn/(n+k)}$ [6] ; г) $x_n = q^n \sin^2[\pi(\sqrt{2}+1)^n]$, $q > 0$ [10] .

19. Визначити, при яких значеннях x_1 (та q для послідовності з (в)) послідовність x_n має скінченну границю та знайти цю границю:

а) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1}{2x_n}$ [5] ; б) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 3}{4x_n}$ [10] ; в) $x_{n+1} = 1 + qx_n^2$ [15] .

20. Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:

а) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\mathrm{arctg}\, x^n$, $(x \geq 0)$ [2] ;

б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n}$, $(x \geq 0)$ [2] ;

в) $f(x) = \lim\limits_{t\to x}\dfrac{\ln(t/x)}{t - x}$, $(x > 0)$ [2] .

21. Обчислити, використовуючи визначні границі:

$$\lim_{x\to a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad [3] \ ; \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{1/x^2} \quad [5] \ ; \quad \lim_{x\to 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x} \quad [5] \ .$$

22. Навести приклад розривної в кожній точці функції, квадрат якої є неперервною функцією. [3]

23. Функцією Діріхле називають таку функцію $\varphi(x)$, для якої $\varphi(x) = 1$ при раціональному x й $\varphi(x) = 0$ при ірраціональному x. Дослідити на неперервність саму функцію $\varphi(x)$, а також $x\varphi(x)$ та $x^2\varphi(x)$. [4]

24. Нехай $f(x) = 0$ при ірраціональному x, $f(0) = 1$ та $f(x) = 1/q$ при $|x| = p/q$, де p та q — цілі додатні взаємно прості числа. Довести, що функція $f(x)$ є неперервною в кожній ірраціональній точці й розривна в кожній раціональній. Чи є ця функція періодичною? Чи існують точки, в яких ця функція є диференційовною? [10]

§3. Диференціальне числення

25. Нехай $\varphi(x)$ є функцією Діріхле, означеною в задачі 23. Чи існують точки, в яких функції $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$ або $x^2\varphi(x)$ диференційовні? [2]

26. Нехай $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ при $x \neq 0$, а $f(0) = 0$. Довести, що ця функція є диференційовною на всій числовій прямій. Чи є ця функція двічі диференційовною на всій числовій прямій? [3]

27. Першою різницею $\Delta\varphi$ функції $\varphi(x)$ з кроком h назвемо величину $\Delta\varphi = \varphi(x + h) - \varphi(x)$. Другою різницею $\Delta^2\varphi$ назвемо величину $\Delta(\Delta\varphi) = \varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x)$. Аналогічно n-ою різницею $\Delta^n\varphi$ назвемо величину $\Delta(\Delta^{n-1}\varphi)$. Знайти загальний вигляд функції $\varphi(x)$, для якої $\Delta^n\varphi(x) = 0$. [10]

28. Довести, що якщо $f(x)$ є двічі диференційовною в точці x_0, то в цій точці існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \ , \qquad (*)$$

яка дорівнює $f''(x_0)$. Навести приклади функцій, для яких:

а) виконано $(*)$, але функція недиференційовна в точці x_0;

б) в точці $x = 0$ функція $f(x)$ є неперервною, $f'(0)$ не існує, а границя $(*)$ існує й не дорівнює 0. [15]

29. Довести, що для визначника з диференційовних функцій маємо

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{i1} & f'_{i2} & \dots & f'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}, \quad [3]$$

За допомогою доведеної формули обчислити $\Delta'(x)$, де

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}. \quad [1]$$

30. Знайти кути, під якими графік функції перетинає вісь абсцис:

а) $x = 3at/(t^3+1)$, $y = 3at^2/(t^3+1)$, $(-1 < t < 1)$ [2] ;

б) $x^2 + y^2 + 2y = 9$, $(y > -1)$ [2] .

31. Записати рівняння нормалі до графіка функції у вказаній точці:

а) $x = \sqrt{2}\cos^3 t$, $y = \sqrt{2}\sin^3 t$, $x = 1/2$, $y = 1/2$ [2] ;

б) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi = \pi/6$ [3] .

32. В яких точках і під яким кутом перетинаються графіки функцій:

а) $\sqrt{2}\sin x$ та $\sqrt{2}\cos x$ [2] ; б) $x^2 + y^2 = 5$ та $y^2 = 4x$ [2] ;

в) $g(x)$ й $g(x)\sin x$, де $g(x)$ — всюди диференційовна функція [3] .

33. Яка віддаль від полюса до довільної дотичної кривої $r = ae^{b\varphi}$? [5]

34. Скільки коренів (залежно від a) має рівняння $a^x = \log_a x$? [5]

35. Знайти $y^{(n)}(x)$ для таких функцій:

$y = \dfrac{1+x}{1-x}$ [2] ; $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ [2] ; $y = x\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ [5] ;

$y = e^{ax}\cos(bx+c)$ [4] ; $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$ [4] ; $y = x^{n-1}e^{1/x}$ [7] .

36. Обчислити $y^{(n)}(1)$ від функції $y(x) = (1 - x^m)^n$, $(m > 0)$. [5]

37. Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ [3] ; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^3}$ [3]

в) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$ [3] ; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x^2}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - x^3/3}$ [5] ;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\pi/2 \cdot \cos x)}{\sin(\sin^2 x)}$ [3] ; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1 - 2x\ln\cos x} - 1}$ [4] ;

є) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha \ln^\beta x}{e^{\gamma x}}$ [2] ; ж) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \dfrac{\beta}{1 - x^\beta} \right)$ [4] .

38. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((x^3 - x^2 + 1 + x/2)e^{1/x} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2} \right)$ [5] ;

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+1}{x} \left(1 - \dfrac{x^2+1}{x} \ln \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} \right)$ [5] .

39. Розкласти за формулою Маклорена такі функції:

а) $\sqrt{\cos x}$ до $o(x^4)$ [3] ; б) $(1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ до $o(x^5)$ [2] ;

в) $e^{x\cos x}$ до $o(x^3)$ [3] ; г) $e^{x/\sin x}$ до $o(x^4)$ [3] .

40. Розкласти за формулою Маклорена до $o(x^n)$ такі функції:

а) $\cos^6 x + \sin^6 x$ [2] ; б) $(1 + x^2)^{-1}$ [1] ; в) $\operatorname{arctg} x$ [3] ;

г) $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ [3] ; д) $(1 - x^2)^{-1/2}$ [3] ; е) $\arcsin x$ [3] ;

є) $\ln(1 - x + x^2)$ [4] ; ж) $\dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}}$ [3] ; з) $\dfrac{x}{(1+x^3)^2}$ [4] .

41. Знайти перші три ненульових доданки розкладу по формулі Маклорена функції, заданої рівнянням $y(x) = x + \int_0^{x-x^2} y(t)\cos t\,dt$. [7]

42. Розкласти за формулою Тейлора:

а) $(x^2-1)e^{2x}$ по степенях $(x+1)^k$ до $o(x+1)^n$ [4] ;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ по степенях $(x-1)^k$ до $o(x-1)^{2n}$ [2] ;

в) $\dfrac{x^2+x}{2x+1}\cos\pi x$ по степенях $(x+1/2)^k$ до $o(x+1/2)^{2n}$ [4] ;

г) $2^{x^3-3x^2+3x}$ по степенях $(x-1)^k$ до $o(x-1)^{3n}$ [2] .

43. Знайти $y^{(k)}(0)$, якщо:

а) $y = e^{-x^2}$, $k = 1000$ [2] ; б) $y = \cos(\sin x)$, $k = 2005$ [3] ;

в) $y = \dfrac{1}{1-x^4}$, $k = 2000$ [2] ; г) $y = \ln\dfrac{\cos(x^2)}{1+x^4}$, $k = 2006$ [3] ;

д) $y = \ln(1+x+x^2+\ldots+x^{999})$, $k = 1000$ [5] ;

е) $y = \ln(1+e^x)$, $k = 2n+1$ [6] .

44. Записати розклад в ряд Маклорена для функції $y(x)$, заданої параметрично рівностями $y(t) = 3t - t^3$ та $x(t) = 2t - t^2$. [5]

45. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд за степенями $1/x$ до $o(1/x^k)$:

а) $f(x) = \mathrm{arctg}x$ [4] ; б) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}dt$ [10] .

46. Навести приклад нескінченно диференційовної функції $f(x)$, ряд Тейлора якої є збіжним в деякому околі $O_\varepsilon(x_0)$, але його сума не співпадає з $f(x)$. [5]

47. Довести, що для чисел Бернуллі B_n, які визначаються з розкладу $x/(e^x-1) = \sum_0^\infty B_n x^n/n!$, виконано такі рівності:

а) $B_0 = 1$, $C_n^0 B_0 + C_n^1 B_1 + \ldots + C_n^{n-1}B_{n-1} = 0$, $n \geq 2$ [4] ;

б) $B_1 = -1/2$, $B_1 = B_3 = \ldots = B_{2n+1} = \ldots = 0$ [5] .

48. Записати через числа Бернуллі B_n (дивись попередню задачу) повний розклад в ряд Маклорена таких функцій:

а) $x/\sin x$ [4] ; б) $\ln(\sin x/x)$ [5] ; в) $\ln\cos x$ [10] .

49. Нехай для функції $f(x)$ існують похідні $f'(x_0)$ та $f''(x_0)$ в сенсі означення $(*)$ задачі 28. Чи завжди буде справедливий формальний розклад функції в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)^2\,? \quad [10]$$

50. Знайти найбільше та найменше значення функцій на відрізках:

а) $y = (x-3)^2 e^{|x|}$, $x \in [-1; 4]$ [3] ;

б) $y = 4x + 3\pi^2/x + \sin x$, $x \in [\pi; 2\pi]$ [4] ;

в) $y = \sin(x - \pi/3) - \cos(x - 2\mathrm{sign}(x)\pi/3)$, $x \in [-\pi; \pi]$ [4] .

51. Знайти інтервали опуклості та точки перегину функцій:

а) $y = e^{\cos x}$ [2] ; б) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ [2] ; в) $y = e^{-2x}\sin^2 x$ [2] .

52. Довести нерівності:

а) $\mathrm{tg}\, x > x + x^3/3$, $0 < x < \pi/2$ [4] ; б) $e^x \ge ex$, $x \in \mathbb{R}$ [1] ;

в) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \le \sqrt[n]{x - y}$, $x \ge y \ge 0$ [3] ; г) $\mathrm{arctg}\, x \le x$, $x \ge 0$ [1] ;

д) $x^\alpha - 1 \le \alpha(x - 1)$, $0 < \alpha < 1$ [1] .

53. Довести нерівність Юнга: якщо $a, b > 0$, $p > 1$ та $1/p + 1/q = 1$, тоді $a^{1/p} b^{1/q} \le a/p + b/q$, причому рівність буде лише при $a = b$. [5]

54. Довести нерівність Гельдера: для будь-яких $x_i \ge 0$ та $y_i \ge 0$ (де $i = 1, 2, \ldots, n$) при $p > 1$, $q > 1$ та $1/p + 1/q = 1$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;\le\; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} . \quad [7]$$

55. Довести, що якщо функція $f(x)$ опукла вгору на відрізку $[a, b]$, то для будь-яких точок $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ виконано нерівність:

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \le f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) . \quad [10]$$

56. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

а) $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ [3] ; б) $y = \sqrt{(x^3 - 2x^2)/(x-3)}$ [4] ;

в) $y = x^2 e^{-x}$ [2] ; г) $y = e^{\cos x}$ [3] ;

д) $y = x^x$ [2] ; е) $y = (1 + 1/x)^x$ [3] ;

є) $y = 1/\operatorname{ch}^2 x$ [2] ; ж) $y = \operatorname{th}^2 x$ [2] ;

з) $y = \sin x - \ln \sin x$ [3] ; і) $y = x^2 \sin(1/x)$ [3] .

57. Дослідити функції, задані параметрично, та побудувати їх графіки:

а) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$ [3] ; б) $x = \ln \sin(t/2),\ y = \ln \sin t$ [5] ;

в) $x = 2\cos t,\ y = 2\cos 3t$ [4] ; г) $x = 3t^2 + 2t^3,\ y = 5t^3 - 3t^5$ [6] ;

д) $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2),\ y = \sin t$ [5] .

58. Дослідити функції, які задано неявно, та побудувати їх графіки:

а) $x^4 + y^4 = 1$ [2] ; б) $(x-1)(y^2 - x^2/3) = 4x^2/3$ [5] ;

в) $x^4 - y^4 = 4x^2 y$ [5] ; г) $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$ [4] ;

д) $(x+y)^3 = xy$ [4] ; е) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ [3] ;

є) $(x^2 + y^2)x = y$ [3] ; ж) $x^y = y^x$ [7] .

59. Побудувати графіки функцій, які задано в полярних координатах:

а) $r = a \operatorname{tg}(4\varphi/5)$ [6] ; б) $r = a\cos(5\varphi/6)$ [5] ;

в) $r = 5 + 3\cos 4\varphi$ [4] ; г) $r = a + b\cos\varphi$ [5] ;

д) $r = -1 + 2/\cos\varphi$ [2] ; е) $r = 1/\sqrt{\sin 3\varphi}$ [3] .

60. Нехай $[x]$ позначає цілу частину числа x. Побудувати множини, які задано такими рівняннями:

а) $(x-2[(x+1)/2])^2+(y-2[(y+1)/2])^2=1$ [3] ;

б) $(x-[(x+1)/2])^2+(y-[(y+1)/2])^2=1$ [3] ;

в) $\left(x-\left[\dfrac{x+1}{2}\right]-2\left[\dfrac{x+2}{4}\right]\right)^2+\left(y-\left[\dfrac{y+1}{2}\right]-2\left[\dfrac{y+2}{4}\right]\right)^2=1$ [10] .

61. В чашку, що має форму півкулі радіуса r, опущено однорідний стержень довжиною l, де $2r<l\leq 4r$. Знайти положення рівноваги цього стержня. [5]

62. На горизонтальній площині стоїть наповнена водою посудина з вертикальною стінкою висоти h. З отвору в стінці посудини тече струмінь. Визначити положення отвору, при якому відстань, на яку буде бити струмінь, є найбільшою, якщо швидкість рідини, що витікає, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x є віддаллю від поверхні води до отвору. [3]

63. Точки A та B розташовані, відповідно, у верхній і нижній напівплощинах прямокутної системи xOy. Частинка рухається по ламаній AMB, де M — точка на Ox. Швидкість частинки у верхній напівплощині v_1, а в нижній v_2. Довести, що час руху частинки буде мінімальним, якщо $\sin\alpha/\sin\beta=v_1/v_2$, де α та β є кутами, що утворюються відрізками AM та BM з нормаллю до Ox. [4]

64. Знайти фігуру найбільшої площі, діаметр якої дорівнює одиниці (діаметром опуклої фігури називають найбільшу відстань між будь-якими двома її точками). [15]

65. Нехай $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — вершини вписаного в коло опуклого багатокутника, при цьому вершини A_0 і A_n фіксовані. Як вибрати точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$, щоб при заданому n периметр та площа багатокутника були найбільшими? [6]

66. Точкове джерело світла, що знаходиться в точці з координатами $(0;b)$, де $b>0$, освітлює область під графіком невід'ємної монотонної та опуклої вниз функції $f\in C^1([0;\infty))$, $f(0)>b$. Промені світла відбиваються від графіка й від осі $0X$ за відомим законом оптики. Чи буде освітленою вся область, якщо $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. [20]

67. Чорнильна паличка одиничної довжини може вільно рухатись всередині прямого кута, одночасно торкаючись обох його сторін своїми кінцями. Знайти рівняння кривої, яка відділяє забарвлену чорнилами область від незабарвленої. [6]

68. У 1803 році італійський математик Ферраре Мальфатті сформулював таку задачу: як потрібно вписати в даний трикутник три кола, які попарно не перетинаються, щоб сумарна їх площа була найбільшою? Мальфатті вважав, що для цього три кола потрібно розмістити так, щоб кожне з них торкалося двох інших та двох сторін трикутника. Більше ста років математики намагалися довести гіпотезу Мальфатті та отримати формулу для радіусів "мальфаттових кіл", але в 1929 році було знайдено простий приклад, що спростовує цю гіпотезу. *Який саме?* Зауважимо, що в 1967 році доведено, що кола Мальфатті не є розв'язком поставленої задачі ні для якого трикутника. [5]

§4. Інтегральне числення

69. Знайти наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}\, dx$ [2] ; б) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{\operatorname{ch} x}\, dx$ [2] ;

в) $\displaystyle\int (x^3 + x)\, e^{-x^2} dx$ [1] ; г) $\displaystyle\int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})\, dx$ [3] ;

д) $\displaystyle\int e^{\arccos x} dx$ [3] ; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^x + e^{2x} + e^{3x}}$ [4] ;

є) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}\, dx$ [1] ; ж) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$ [2] .

70. Знайти наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$ [3] ; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}$ [4] ;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$ [5] ; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11} + 2x^6 + x}$ [5] ;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$ [3] ; е) $\displaystyle\int \frac{(1-4x^5)}{(1+x+x^5)^2} dx$ [5] .

71. Знайти наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$ [7] ; б) $\displaystyle\int \frac{x^8dx}{\sqrt{x^2-1}}$ [4] ;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$ [4] ; г) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ [3] ;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ [4] ; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$ [3] .

72. Знайти умови, при яких є алгебраїчною функцією інтеграл

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad [3]\ .$$

73. Отримати формулу зведення Абеля

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2n+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^n \int (a-t^2)^{n-1}dt\ ,$$

де $t = (\sqrt{ax^2+bx+c}\,)'$. [4]

74. Знайти наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ [4] ; б) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$ [4] ;

в) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$ [5] ; г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}\,dx$ [5] ;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$ [5] ; е) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}}$ [4] ;

є) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7\sqrt{x^4+1}}$ [4] ; ж) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$ [5] .

75. Виразити через елементарні функції та еліптичні інтеграли першого $F(\alpha,k)$ й другого $E(\alpha,k)$ роду (де $F(\alpha,k)=\int(1-k^2\sin^2\alpha)^{-1/2}d\alpha$, $E(\alpha,k)=\int(1-k^2\sin^2\alpha)^{1/2}d\alpha,\ k\in(0,1)$) такі інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$ [5] ; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2-8x^4}}$ [5] ;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+29x^2+100x^4}}$ [5] ; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ [7] .

76. *Повними еліптичними інтегралами* називають інтеграли

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha \quad \text{та} \quad F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\ ,$$

де $k\in(0,1)$. Виразити $E'(k)$ та $F'(k)$ через $E(k)$ та $F(k)$. [5]

77. Знайти наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$ [2] ; б) $\displaystyle\int \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\,dx$ [2] ;

в) $\displaystyle\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$ [2] ; г) $\displaystyle\int \frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a\cos x+b\sin x}\,dx$ [4] .

78. Знайти рекурентні формули для таких інтегралів:

а) $\displaystyle I_n=\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ [2] ; б) $\displaystyle I_n=\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$ [6] ;

в) $\displaystyle I_n=\int \frac{\sin^n\frac{x-a}{2}}{\sin^n\frac{x+a}{2}}\,dx$ [6] .

79. Знайти умови, при яких є елементарною функцією інтеграл

$$\int\left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)e^x\,dx \qquad [3]\ .$$

80. Довести тотожність $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx=-\int_0^1 x^x\ln x\,dx$ [2].

81. Виразити через інтегральний логарифм $\operatorname{li}x=\int\frac{dx}{\ln x}$, інтегральний синус $\operatorname{Si}x=\int\frac{\sin x}{x}dx$, інтеграл ймовірностей $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2}dx$ та елементарні функції наступні інтеграли:

$$
\begin{array}{llll}
\text{а)} & \displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx\,,\ x<0 \quad [1]\ ; & \text{б)} & \displaystyle\int \frac{x^{100}}{\ln x}\,dx \quad [2]\ ; \\
\text{в)} & \displaystyle\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2} \quad [2]\ ; & \text{г)} & \displaystyle\int e^{-(2x^2+2x+1)}dx \quad [2]\ ; \\
\text{д)} & \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{x}\,dx \quad [2]\ ; & \text{е)} & \displaystyle\int x^2e^{-x^2}dx \quad [2]\ ; \\
\text{є)} & \displaystyle\int e^{-x^2-1/x^2}dx \quad [4]\ ; & \text{ж)} & \displaystyle\int \Phi_0(x)dx \quad [2]\ ; \\
\text{з)} & \displaystyle\int x\,\mathrm{Si}(x)dx \quad [2]\ ; & \text{і)} & \displaystyle\int \mathrm{li}(x)dx \quad [2]\ .
\end{array}
$$

82. Знайти наступні визначені інтеграли:

$$
\begin{array}{llll}
\text{а)} & \displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)^n dx \quad [3]\ ; & \text{б)} & \displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)^{n+1/2}dx \quad [3]\ ; \\
\text{в)} & \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^m\,dx \quad [2]\ ; & \text{г)} & \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)} \quad [10]\ .
\end{array}
$$

83. Нехай $f(x)$ є функцією, означеною в задачі 24. Чи є ця функція інтегрованою за Ріманом на довільному відрізку $[a,b]$? [7]

84. Довести, що у випадку $f\in C[0,+\infty)$ та збіжності при $a>0$ інтеграла $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ має місце формула Фрулані:

$$
\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \;=\; f(0)\ln\frac{b}{a},\quad a>0,\ b>0 \quad [5]\ .
$$

За допомогою цієї формули обчислити інтеграл:

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 ax-\sin^4 bx}{x}\,dx\,,\quad a>0,\ b>0 \quad [2]\ .
$$

85. Знайти наступні інтеграли (n — натуральне число):

а) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ [5] ; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$ [4] ;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ [7] ; г) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}}\,dx$ [5] ;

д) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\cos nx\,dx$ [5] ; е) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\sin(n+2)x\,dx$ [6] .

86. Використовуючи метод диференціювання по параметру, знайти такі інтеграли ($n \in \mathbb{N},\ a,b > 0,\ 0 < p,q < 1,\ \alpha,\beta$ — довільні):

а) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ [3] ; б) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha-1}\ln^n x\,dx\,,\ \alpha > 0$ [2] ;

в) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 dx$ [5] ; г) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i\alpha x}-1)(e^{i\beta x}-1)}{x^2}\,dx$ [5] ;

д) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$ [5] ; е) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ |a| \le 1$ [6] .

87. Обчислити наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ [5] ; б) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$ [7] ;

в) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$ [7] ; г) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-\sin^2\alpha)}$ [4] ;

д) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}-\cos x}{x}\,dx$ [5] ; е) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}$ [15] .

88. Обчислити інтеграл Пуассона $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$. [7]

89. Обчислити наступні інтеграли ($n \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$):

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln|1-x^2|}{x^2}\,dx$ [7] ; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$ [7] ;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ [7] ; г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx\,, \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$ [7] ;

д) $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln \operatorname{th} x\,dx$ [7] ; е) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x)\ln^2(1-x)}\,dx$ [10] ;

є) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1}$ [10] ; ж) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$ [10] ;

з) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}\,dx$ [10] ; і) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^a}-e^{-x^b}}{x}\,dx$ [10] ;

к) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$ [10] ; л) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ [10] ;

м) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-b^2x^2-a^2/x^2}dx$ [10] ; н) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\sin x}{x}dx$ [15] ;

о) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ [10] .

При обчисленні деяких з цих інтегралів можна використати інтеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, рівність $\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$ (γ — стала Ейлера) та суми $\sum_1^\infty 1/k^2 = \pi^2/6$, $\sum_1^\infty (-1)^{k+1}/k^2 = \pi^2/12$.

90. Постійною Каталані G називається величина, яка визначається сумою $G = \sum_0^\infty (-1)^n/(2n+1)^2$. Виразити через постійну Каталані наступні інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ [3] ; 2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,dx$ [3] ; 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x\cos x\,dx}{1+\sin x}$ [10] ;

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\operatorname{tg} x\,dx$ [5] ; 5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\,dx$ [4] .

91. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} e^{\sin x}dx$. *Вказівка: функцією Макдональда нульового порядку називається така функція $I_0(x)$, яка задовольняє рівнянню $I_0'' + x^{-1}I_0' - I_0 = 0$, де $I_0(0) = 1$ та $I_0'(0) = 0$.* [7]

92. Обчислити інтеграл Лапласа

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt\, dt}{1+t^2}$$

наступним способом: довести, що при $x \neq 0$ функція $I(x)$ задовольняє диференціальному рівнянню $I''(x) = I(x)$ з умовами $I'(+0) = -\pi/2$ та $I(\infty) = 0$, та розв'язати це рівняння. [9]

93. Визначити, який з двох інтегралів є більшим:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$ або $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x}{1+2\cos x}\, dx$ [5] ;

б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$ або $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3}{4-\cos x}\, dx$ [5] .

94. Довести рівності:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\, dx = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$ [6] ;

б) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ [3] ;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx$,

де $f(x)$ є довільною неперервною функцією на відрізку $[0,1]$. [5]

95. Обчислити інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\pi(x)}{x^3 - x}\, dx \ ,$$

де $\pi(x)$ — кількість простих чисел, що не перевищують x. [5]

Вказівка: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1 - p_i^{-n}) = 1$, *де* p_i — *прості числа* ($p_1 = 2$).

96. Обчислити інтеграли з Γ-функцією:

а) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\, dx$ [5] ; б) $\displaystyle\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\, dx$ [5] ; в) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x) \ln\Gamma(x)\, dx$ [5] .

97. Довести, що якщо функція $f(x)$ є неперервною й додатною на відрізку $[0;1]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\dots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)dx\right). \quad [3]$$

98. За допомогою визначених інтегралів знайти наступні границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ [2] ; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n}$ [5] ;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{n+1/k}$ [3] ; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$ [4];

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$ [2] ; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{k(n-k)}$ [4] ;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ [2] ; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}\sin(k/n^{3/2})$ [10] .

99. Довести, що для будь-яких многочлена $Q_m(x)$ і полінома Лежандра $P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]/2^n n!$ при $n>m$ буде $\int_{-1}^{+1}Q_m(x)P_n(x)dx=0$. [3]

100. Довести, що для поліномів Лежандра (дивись попередню задачу) справедлива формула $\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)dx=2/(2n+1)$. [5]

101. Обчислити площі фігур, обмежених кривими ($a>0$; $b>0$; $n\in\mathbb{Z}$):

а) $x^4+y^4=ax^2y$ [5] ; б) $r^2=a^2\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$, $r=a$, $r\le a$ [4];

в) $x=at-t^2$, $y=at^2-t^3$ [2]; г) $x=a\sin 2t$, $y=a\sin t$ [2] ;

д) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $2ay=x^2$ [3] ; е) $(x-a)^2(x^2+y^2)=4a^2x^2$ [5] ;

є) $y=e^{-x}|\sin x|$, $y=0$, $\pi n\le x\le\pi(n+1)$ [3] ;

ж) $x=a(1+2\cos t)$, $y=a(\mathrm{tg}t+2\sin t)$ [5] .

102. Знайти криву $r = r(\varphi)$, для якої площа сектора, що обмежена цією кривою і прямими $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, обчислюється за формулою $S = ar^n(\alpha)$, $n > 2$ для будь-якого $\alpha \in (0; \pi)$. [3]

103. Знайти радіус кола з центром в початку координат, яке ділить дугу астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ на три дуги однакової довжини. [5]

104. Нехай $s(\alpha)$ — довжина дуги логарифмічної спіралі $r = ae^{-k\varphi}$, де $k > 0$ та $0 \leq \varphi \leq \alpha$. Обчислити $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} s(\alpha)$. [3]

105. Знайти об'єм бочки висотою h, діаметр кожної з основ якої d, а діаметр середнього перерізу D. Осьові перерізи бічної поверхні є параболами з вершинами на колі середнього перерізу. [3]

106. Знайти об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо полярної осі равлика Паскаля: (а) $r = a\cos\varphi + l$, $l < a$ (зовнішня петля), (б) $r = a\cos\varphi - l$, $l < a$ (внутрішня петля), (в) $r = a\cos\varphi + l$, $l \geq a$. [7]

107. Знайти площу еліпсоїда обертання $(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/b^2 = 1$ (при $a > b$ — стиснутий еліпсоїд, при $a < b$ — витягнутий). [4]

108. Циклоїда $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, обертається навколо прямої $y = ka$, $0 \leq k \leq 2$. Знайти площу поверхні тіла обертання що утворюється. При якому значенні k площа поверхні буде мінімальною? Знайти цю найменшу площу. [7]

109. Гладка крива і вісь, що її не перетинає лежать в одній площині. Довести, що площа поверхні тіла обертання, яке утворюєтья при обертанні кривої навколо вісі, дорівнює добутку довжини дуги на довжину кола, що описує центр мас цієї кривої (перша теорема Гульдина). [4]

110. Довести, що об'єм тіла, яке утворюється при обертанні плоскої фігури навколо вісі, що її не перетинає, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, яке описує центр мас цієї фігури (друга теорема Гульдина). [4]

111. Тор утворюється обертанням кола радіусу r навколо вісі, що лежить у площині кола на відстані $d > r$ від його центру. Використовуючи теореми Гульдина, знайти площу поверхні й об'єм тора. [2]

112. З теореми Гульдина отримати центр мас півкола радіуса r. [2]

113. Знайти роботу, необхідну для зупинки кулі радіуса R та маси m, яка обертається навколо свого діаметру з кутовою швидкістю ω. [3]

114. Яку роботу треба виконати, щоб насипати конічну купу піску висотою H і радіусом основи R? Густина піску ρ. [3]

115. Швидкість розчинення солі у воді пропорційна кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією насиченого розчину і концентрацією розчину в даний момент. Масу m_0 *кг* солі розчиняють у N *л* води. Концентрація насиченого розчину дорівнює c_0 *кг/л*. За час τ розчинилася половина солі. За який час розчиниться $3m_0/4$ *кг* солі (вважати, що $m_0 = 2Nc_0/3$)? [7]

116. Ракета з початковою масою m_0 із стану спокою проходить відстань l з постійним прискоренням a. На неї діє стала сила F, направлена проти швидкості ракети. Знайти витрати палива на ділянці довжиною l, якщо при цьому швидкість витікання продуктів згорання палива відносно ракети є сталою і дорівнює u. [5]

117. Студент вирішив заробити, прибираючи від снігу певну ділянку. Йому запропонували на вибір дві ділянки однакової площі: круглу та квадратну. Для прибирання якої з цих ділянок треба затратити меншу роботу? У скільки разів? Вважати, що робота по розчищенню частини ділянки величиною ΔS пропорційна масі снігу на цій ділянці та відстані, на яку потрібно відносити сніг. [4]

§5. Частинні похідні

118. Для функції $f(x, y, z) = \varphi(x/y, y/z)$ обчислити $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$. [3]

119. Знайти частинні похідні 1-го порядку функцій $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, які задано системою рівнянь $xy = z \cos u \cos v$, $yz = x \cos u \sin v$. [4]

120. Знайти z'_x та z'_y, якщо:

а) $z = (x + t)/(y + t)$, $te^t = xe^x + ye^y$ [3] ;

б) $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $z = uv$ [3] ;

в) $z = f(x, y, u, v)$, $g(y, u, v) = 0$, $h(u, v) = 0$ [6] .

121. Для функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, які задані системою рівнянь

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - u/(1 + v) = 2x \ , \end{cases}$$

знайти d^2u та d^2v в точці $x = 1$, $y = 2$ (тобто при $u = v = 0$). [6]

122. З рівностей $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$ випливає, що $\partial x_i/\partial r = x_i/r$. З іншого боку, $\partial x_i/\partial r = (\partial r/\partial x_i)^{-1}$. Тоді, внаслідок $r = (\sum x_j^2)^{1/2}$, маємо $\partial r/\partial x_i = x_i/r$, звідки $\partial x_i/\partial r = r/x_i$. Отже, отримуємо протиріччя. Де помилка? [2]

123. Знайти частинну похідну $(\partial f/\partial g)_h$, якщо

$$f = \sin(xy), \quad g = \cos(x+y), \quad h = 2x + y + 1. \quad [2]$$

Напишіть загальну формулу для обчислення похідної $(\partial f/\partial g)_h$ для довільних функцій f, g та h. Якій умові повинні задовольняти функції f, g та h, щоб ця похідна існувала? Що означає ця умова? [2]

124. Довести тотожність $(\partial f/\partial g)_h \cdot (\partial g/\partial h)_f \cdot (\partial h/\partial f)_g = -1$. [2]

125. Дослідити функцію $f(x,y)$ на диференційовність в точці $(0,0)$ та знайти частинні похідні $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, якщо вони існують:

а) $$f(x,y) = \begin{cases} x^2y/(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad [3] \ ;$$

б) $$f(x,y) = \begin{cases} y^{4/3}\ln(y^2+x^{4/3}), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad [3] \ .$$

126. Для яких степенів α та β функція $f(x,y)$ буде диференційовною в точці $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} x^\alpha y^\beta/(|x|+|y|), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad [3] \ .$$

127. Знайти загальний вигляд для неперервно диференційовної функції $f(x)$, яка задовольняє такому рівнянню:

а) $f(x+y^n) = f(x) + f^n(y)$ [3] ; б) $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ [3] ;

в) $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x) + f(y)$ [3] .

128. Знайти диференціал $d^n u(x,y)$, якщо:

а) $u(x,y) = f(x)g(y)$ [1] ; б) $u(x,y) = f(ax+by)$ [2] ;

в) $u(x,y) = f(x+y)\,g(x-y)$ [1] .

129. Розкласти в ряд Маклорена функцію $u(x,y)$, якщо:

а) $u(x,y) = f(x)g(y)$ [2] ; б) $u(x,y) = f(xy)$ [2] ;

в) $u(x,y) = f(x^2 + y^2)$ [2] .

130. Розкласти за формулою Маклорена до четвертого порядку включно функцію $u(x,y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2 y} dt$. [4]

131. Для оператора $D = x\partial_x + y\partial_y$ знайти $D^n f(\ln(ax+by))$. [3]

132. Однорідною функцією порядку n називається функція $f(x,y)$, для якої $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$. Довести, що для такої функції виконано:

а) $(x\partial_x + y\,\partial_y) f(x,y) = nf(x,y)$ [2] ;

б) $(x^2\partial^2_{xx} + 2xy\,\partial^2_{xy} + y^2\partial^2_{yy}) f(x,y) = n(n-1)f(x,y)$ [2] .

133. Нехай задано складну функцію $f(x,y) = F(u,v)$, де u та v є функціями від (x,y). Знайти вираз для $d^2 f$. Якій умові повинні задовольняти функції u та v, щоб форма другого диференціалу залишалась інваріантною в змінних x, y та u, v? [3]

134. Знайти радіальну частину оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ в n-вимірному евклідовому просторі. [5]

135. Нехай $\Omega(x,y,z)$ — це тілесний кут, під яким з точки (x,y,z) видно замкнений контур, розташований в площині XY. Показати, що $\Delta\Omega(x,y,z) = 0$. [5]

136. Перетворити рівняння $y''(x) + (y')^2 = 0$, прийнявши за нову функцію $x = x(t)$, де $e^y = xt$. [4]

137. Перетворити рівняння $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$, перейшовши до нової функції $z = z(y)$, де $z = \ln(y/x)$. [5]

138. Перетворити рівняння $\Delta z + \lambda z = 0$, прийнявши u та v за незалежні змінні: а) $2x = u^2 - v^2$, $y = uv$; [6] б) $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$. [6]

139. Перейти від рівняння для $z(x,y)$ до рівняння для $w(u,v)$, де u та v — нові незалежні змінні, а w — нова функція:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$. [5]

б) $\dfrac{x}{1+x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{y}{1+y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\quad xe^x=ue^\omega,\ ye^y=ve^\omega,\ ze^z=2\omega e^\omega.$ [8]

140. Перейшовши від x та y до нових незалежних змінних $u=x-2\sqrt{y}$ та $v=x+2\sqrt{y}$, розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \;=\; \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}\,,\ y>0\,. \quad [5]$$

141. Взявши x за функцію від змінних y та z, розв'язати рівняння:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\,. \quad [5]$$

142. Довести, що вираз $f''_{xx}+f''_{yy}$ зберігає свій вигляд при повороті системи координат на довільний кут. [5]

143. Довести, що для поверхні, заданої рівнянням $F(x,y,z)=0$:

а) вектор $\overrightarrow{n}=\nabla F(x,y,z)\,/\,|\nabla F(x,y,z)|$ є вектором одиничної нормалі до цієї поверхні в точці (x,y,z); [3]

б) $F_x'(x-x_o)+F_y'(y-y_o)+F_z'(z-z_o)=0$ є рівнянням дотичної площини в точці (x_o,y_o,z_o). [2]

144. Для кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ знайти рівняння стичної площини, тобто граничного випадку площини, яка проходить через три точки кривої при прямуванні цих точок до заданої точки кривої. [5]

145. Дослідити на екстремум такі функції:

а) $u=x^2+xy+y^2+1/x+1/y$ [3] ; б) $u=x^4+y^4-36xy$ [3] ;

в) $u=(x^2-y^2)\,/\,(1+x^4+y^4-2x^2y^2)$ [5] ; г) $u=e^{2x}(x+y^2+2y)$ [3] .

146. Через точку $A(a,b,c)$ першого октанту $(a,b,c>0)$ провести площину, що відсікає від нього тетраедр найменшого об'єму. [5]

147. На сторонах кута A розташувати точки B та C так, щоб при фіксованій довжині сторони $BC=d$ площа трикутника ABC була максимальною. [4]

148. Знайти довжини головних осей еліпса, який утворюється при перетині циліндру $x^2+2y^2=1$ площиною $x+y+z=0$. [7]

149. На площині задано n матеріальних точок, причому i-та точка P_i має масу m_i та координати (a_i, b_i). Знайти координати (x, y) такої точки P, щоб величина $\sum_1^n m_i[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]$ була мінімальною. Дайте результату фізичне пояснення. [2]

150. Знайти мінімальний об'єм ядерного реактора в формі прямого циліндра, врахувавши відоме з теорії дифузії нейтронів рівняння зв'язку $(R_1/R)^2 + (\pi/H)^2 = const$, де R — радіус циліндра, H — його висота, а $R_1 = 2.4048$ — перший нуль функції Бесселя $J_o(R)$. [2]

151. Знайти довжини головних осей n-вимірного еліпсоїда з рівнянням $\sum x_i x_j = 1$ $(i \le j)$. [7]

152. Як потрібно провести пряму через центр куба, тетраедра або октаедра, щоб сума квадратів відстаней від неї до вершин була: а) мінімальною, б) максимальною. [15]

§6. Інтеграли функцій декількох змінних

153. Обчислити інтеграли по множині $\Omega = \{x, y \ge 0,\ x^\alpha + y^\beta \le 1\}$:

$$\text{а)} \iint_\Omega \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m}\,dxdy \quad \text{б)} \iint_\Omega \frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(1 - x^\alpha - y^\beta)^m}\,dxdy \quad [7]\ .$$

154. Довести рівності

$$\text{а)} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy = \int_0^1 y^y\,dy \quad [5]\ ;$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(2a\sin x \sin y)\,dxdy = \left(\int_0^{\pi/2} \cos(a \sin x)\,dx\right)^2 \quad [10]\ ;$$

$$\text{в)} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{dxdy}{1 - k^2\sin^2 x \sin^2 y} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}\,,\ k \in (0,1)\ ,$$

причому спільним значенням цих інтегралів є $\pi/2$. [5]

$$\text{г)} \int_0^1 \int_0^1 f(xy)(1-x)^{p-1}y^p(1-y)^{q-1}dxdy =$$

$$= B(p,q)\int_0^1 f(v)(1-v)^{p+q-1}dv \quad [15] \ .$$

155. Нехай множина Ω обмежена параболою $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ та осями координат. Обчислити такі інтеграли по цій множині:

$$\text{а)} \ \iint_\Omega \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy\,; \quad \text{б)} \ \iint_\Omega (xy)^n dxdy \quad [6] \ .$$

156. Нехай множина Ω є трикутником, утвореним осями координат та прямою $x+y=1$. Обчислити інтеграл $\iint_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}dxdy$ [3].

157. Нехай множина Ω є трикутником, обмеженим прямими $y=0$, $x=\pi$ та $y=x$. Обчислити інтеграл $\iint_\Omega \ln\sin(x-y)\,dxdy$ [5].

158. Нехай область Ω обмежена параболами $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$ та $y^2=qx$ (де $0<a<b$, $0<p<q$). Обчислити інтеграл:

$$\iint_\Omega \frac{x^2\sin(xy)}{y}\,dxdy \quad [3] \ .$$

159. Обчислити невласні інтеграли

$$\text{а)} \ \int_0^\infty\int_0^\infty |\ln x-\ln y\,|\,e^{-(x+y)}\,dxdy \quad [4] \ ;$$

$$\text{б)} \ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\cos x\cos y\,dxdy\,, \quad a>0 \quad [7] \ .$$

160. Нехай $\Omega=\{0\le x\le \alpha,\ y\le x\}$, а $\varphi(x)$ — довільна неперервна на $[0,\alpha]$ функція. Зводячи подвійний інтеграл

$$\iint_\Omega \frac{\varphi(y)\,dxdy}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}$$

до повторного, довести формулу

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}} \ = \ \pi\int_0^\alpha \varphi(y)dy \ . \quad [2]$$

161. Використовуючи отриману в попередній задачі формулу, розв'язати інтегральне рівняння

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} \ ,$$

тобто за заданою $f(x)$ знайти невідому функцію $\varphi(x) \in C^1[0,\alpha]$. [3]

162. Розв'язати задачу Абеля: по якій траєкторії повинна рухатись важка кулька в полі тяжіння (без тертя), щоб час її руху з висоти h до найнижчої точки кривої не залежав від h? [6]

163. Нехай область інтегрування Ω обмежена однією петлею лемніскати $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. Обчислити інтеграл

$$\iint_\Omega \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} \ . \quad [3]$$

164. Розглянемо інтеграли $I_x = \iint_\Omega f(r)x\,dxdy, I_y = \iint_\Omega f(r)y\,dxdy, I_{xx} = \iint_\Omega f(r)x^2\,dxdy$, $I_{xy} = \iint_\Omega f(r)xy\,dxdy$, $I_{yy} = \iint_\Omega f(r)y^2\,dxdy$. Використовуючи симетрію області інтегрування Ω, отримати рівності:

а) $I_x = I_y = 0$, $I_{xx} = I_{yy}$, $I_{xy} = 0$, якщо Ω інваріантна відносно поворотів на кут $2\pi/n$ $(n \geq 3)$ навколо початку координат; [7]

б) $I_y = kI_x$, $(1-k^2)I_{xy} = k(I_{xx} - I_{yy})$, якщо Ω переходить сама в себе при дзеркальному відображенні відносно прямої $y = kx$. [7]

Які будуть співвідношення між цими інтегралами, якщо Ω інваріантна при віддзеркаленні відносно двох ортогональних прямих? [1]

165. Обчислити однократні інтеграли, зводячи їх до повторних (при цьому $a, b > 0$, $n = 0, 1, 2\dots$):

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$ [3] ; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^p}\,dx$ [4] ;

в) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x}\,dx$ [5] ; г) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$ [7] ;

д) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^a} - e^{-x^b}}{x}\,dx$ [5] ; е) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ [7] ;

є) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ [10] ; ж) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx$ [10] .

166. Дробовою похідною Рімана–Ліувілля називають оператор $D^{1/2}$, дія якого на функцію $x(t)$ виражається рівністю

$$D^{1/2}x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\ .$$

Довести, що $D^{1/2}D^{1/2}x(t) = x'(t)$, якщо потрібні інтеграли існують. [8]

167. Знайти тілесний кут, під яким правильний n-кутник з ребром a видно з точки, що знаходиться на відстані h від центру фігури (по нормалі до її площини). [8]

168. Обчислити такі інтеграли:

а) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dV$, де $\Omega = \{\sqrt{(x/a)^2+(y/b)^2} \le z/c \le 1,\ x,y \ge 0\}$ [3] ;

б) $\displaystyle\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,dV$, де $\displaystyle\Omega = \left\{\frac{x^2+y^2}{2a} \le z \le \sqrt{3a^2-x^2-y^2}\right\}$ [4];

в) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{xyz\,dV}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}$, $\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x,y,z \ge 0\}$ [5];

г) $\displaystyle\iiint_\Omega x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dV$, $\displaystyle\Omega = \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \le 1,\ x,y,z \ge 0\right\}$ [6].

169. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $(x^2+y^2)^2+z^4 = y$ [5] ; б) $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^3xyz$ [5] ;

в) $(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2)^2 = (x^2/a^2+y^2/b^2)\cdot(z/c)$ [5] .

170. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x+y+z)^2 = ay$ (де $x,y,z \ge 0$), перейшовши до нових змінних r,θ,φ за такими формулами: $x = r\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\theta\sin^2\varphi$, $z = r\cos^2\theta$. [4]

171. Знайти силу, з якою конус притягує точкову масу m, що знаходиться в його вершині (висота конуса h, кут при вершині 2α, стала густина матеріалу ρ). [4]

172. Знайти моменти інерції відносно OX та OZ тора масою m, утвореного обертанням навколо OZ кола $(x-R)^2+z^2 = r^2$ $(R > r)$. [7]

173. З відрізку $[0,1]$ випадковим чином[1] вибирають дві точки. Знайти середнє значення $\langle l\rangle$ відстані l між ними [3]. Яка ймовірність того, що отримана відстань більша за $\langle l\rangle$? [2]

174. З відрізку $[0,1]$ випадковим чином обирають три числа. Яка ймовірність, що ці числа є довжинами сторін деякого трикутника? [5]

175. З відрізку $[-a,a]$ випадковим чином обирають числа u та v. Яка ймовірність того, що корені рівняння $z^2+uz+v=0$ є дійсними? [5] Яка ймовірність того, що біквадратне рівняння $z^4+uz^2+v=0$ має одночасно як дійсні, так і комплексні корені? [2]

176. В одиничному колі випадковим чином обираються дві точки. Знайти середній квадрат $\langle l^2\rangle$ відстані l між цими точками. [7]

177. На колі радіуса R випадковим чином обираються дві точки. Знайти: а) середню довжину $\langle l\rangle$ хорди, що з'єднує ці точки [4]; б) середнє значення $\langle\alpha\rangle$ кутової міри дуги $\alpha\le\pi$ між цими точками. [2]

178. Всередині кулі радіуса R народжуються нейтрони. Вважаючи, що розподіл нейтронів по об'єму кулі однорідний і всі напрямки рівноймовірні, обчислити середню відстань, яку проходить нейтрон до поверхні кулі. Рух вважати прямолінійним, зіткненнями знехтувати. [15]

179. Яка гравітаційна енергія однорідної кулі радіуса r й маси m? [5]

180. Обчислити, як змінюється тиск всередині однорідної рідкої кулі радіуса r й маси m. [6]

181. Однорідну кулю радіуса r й маси m розрізали по діаметру на дві половинки. З якою силою притягуються ці половинки? [5]

182. Знайти момент інерції однорідних куба та октаедра маси m відносно довільної осі, що проходить на відстані a від центра фігури. [10]

---

[1] Ймовірність вибору точки з даної множини пропорційна мірі цієї множини (відповідно довжині, площі чи об'єму).

183. Обчислити наступні n-кратні інтеграли:

а) $\displaystyle\int\ldots\int_{\Omega}(x_1+\ldots+x_n)^2 dx_1\ldots dx_n$, де $\Omega=\{0\le x_1,\ldots,x_n\le 1\}$ [4] ;

б) $\displaystyle\int\ldots\int_{\Omega}\max(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$, де $\Omega=\{0\le x_1,\ldots,x_n\le 1\}$ [3];

в) $\displaystyle\int\ldots\int_{\Omega}\min(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$, де $\Omega=\{0\le x_1,\ldots,x_n\le 1\}$ [3];

г) $\displaystyle\int\ldots\int_{\Omega}\sum_{i\le j}c_{ij}x_ix_j\,dx_1\ldots dx_n$, де $\Omega=\{\,\sum_i(x_i-a_i)^2/b_i^2\le 1\,\}$ [10] ;

д) $\displaystyle\int\ldots\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\sum_{i\le j}x_ix_j}\,dx_1\ldots dx_n$ [10] .

184. Знайти площу поверхні n-вимірної кулі радіуса R. [5]

185. Знайти об'єм таких багатовимірних областей:

а) $\Omega_1=\{\,0\le x_1,\ldots,x_4\le 2,\ x_1x_2x_3x_4\le 1\,\}\subset\mathbb{R}^4$ [7] ;

б) $\Omega_2=\{\,x_1,\ldots,x_4\ge 0\,,\ x_1x_2x_3x_4/x_i=1\,,\ i=1,\ldots,4\,\}\subset\mathbb{R}^4$ [12] ;

в) $\Omega=\{\,x_1,\ldots,x_n\ge 0\,,\ (x_1\cdots x_n)/x_i=1\,,\ i=1,\ldots,n\,\}\subset\mathbb{R}^n$ [15].

186. Чотиривимірний куб $\{\,0\le|x_1|,\ldots,|x_4|\le 1\,\}$ перетинається гіперплощиною $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=0$. Знайти об'єм багатогранника, що утворюється в перетині, якщо: а) $\boldsymbol{n}=(1,1,1,0)$ [15]; б) $\boldsymbol{n}=(1,1,1,1)$ [20].

187. Для області $\Omega=\{\,x_1^2+\ldots+x_4^2\le 1\,\}\subset\mathbb{R}^4$ обчислити інтеграл $\int\ldots\int_{\Omega}e^{x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2}\,dx_1\ldots dx_4$. [5]

188. Довести, що n-кратний інтеграл

$$\frac{1}{n!}\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n)\end{vmatrix}^2 dx_1dx_2\ldots dx_n$$

дорівнює визначнику

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2 dx & \int_a^b f_1 f_2 dx & \dots & \int_a^b f_1 f_n dx \\ \int_a^b f_2 f_1 dx & \int_a^b f_2^2 dx & \dots & \int_a^b f_2 f_n dx \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \int_a^b f_n f_1 dx & \int_a^b f_n f_2 dx & \dots & \int_a^b f_n^2 dx \end{vmatrix} . \quad [6]$$

189. Для поверхні, яку задано параметрично рівняннями $x_i = x_i(u, v)$, (x_i — це x, y, z), квадрат елемента довжини на цій поверхні дорівнює

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2,$$

де $g_{11} = \sum(\partial x_i/\partial u)^2$, $g_{22} = \sum(\partial x_i/\partial v)^2$, $g_{12} = \sum(\partial x_i/\partial u)(\partial x_i/\partial v)$ є так званими метричними коефіцієнтами. Визначити їх геометричний смисл. Показати, що елемент площі на цій поверхні дорівнює

$$dS = \sqrt{g}\, du dv\,, \quad \text{де} \quad g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2\,. \quad [5]$$

Записати частинні випадки цього виразу для поверхні, заданої в декартових, циліндричних та сферичних координатах відповідними рівняннями $z = z(x, y)$, $\rho = \rho(z, \varphi)$ та $r = r(\theta, \varphi)$. [5]

190. Знайти поверхневі інтеграли $\int (x + y + z)\, dS$ та $\int (x + y + z)^2\, dS$ по параболоїду $x^2 + y^2 = az$, $0 \le z \le a$. [6]

191. Використовуючи міркування симетрії показати, що наведені нижче поверхневі інтеграли першого роду дорівнюють нулю:

а) $$\iint_S \Big(\sum a_i x_i + \sum\nolimits_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \sum c_{ijk} x_i x_j x_k \Big) / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\, dS\,,$$
де $S = \{\, x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 = 1 \,\}$ [5] ;

б) $$\iint_S (x + y + z)(2x - 3y + z - 2) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz}\, dS\,,$$
де $S = \{\, |x + y - z| + |x - y + z| + |z - x + y| = 1 \,\}$ [7] ;

в) $$\iint_S (2x^2 + 5y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3yz - 2) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dS\,,$$
де $S = \{\, x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 1 \,\}$ [10] .

192. Використовуючи властивості симетрії поверхні, довести рівність

$$\iint_S \sum_{i\le j} c_{ij}x_i x_j\, dS \;=\; 4\pi r^2 \big[\sum_{i\le j} c_{ij}a_i a_j + r^2\,(c_{11}+c_{22}+c_{33})/3 \big]\ ,$$

де $S = \{\,(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2\,\}$. [7]

193. Обчислити інтеграл $\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\,dS$, де Σ — частина конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка обмежена циліндром $x^2+y^2=2ax$. [5]

194. Знайти електричне поле, яке створює рівномірно поверхнево заряджена півсфера в її центрі. Яке електричне поле в центрі створює один октант сфери? Радіус сфери r, поверхнева густина заряду σ. [6]

195. Знайти нормальну складову електричного поля, яке створює рівномірно заряджена *плоска* фігура в точці простору, з якої цю фігуру видно під тілесним кутом Ω. Поверхнева густина заряду σ. [1]

196. Кулю радіуса r занурено в рідину з густиною ρ на глибину $h>r$, відраховуючи від центра кулі. Знайти силу тиску рідини на верхню та нижню половинки кулі. [4]

197. В кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$ циліндрами $x^2+y^2=\pm ax$ прорізали два отвори. Знайти об'єм та зовнішню площу поверхні утвореного тіла. [7]

198. Знайти об'єм та площу поверхні фігури, яка утворюється при перетині циліндрів $x^2+z^2=a^2$ та $y^2+z^2=a^2$. [6]

199. Як відомо, знак f'' визначає опуклість функції, зокрема, при $f''<0$ функція f опукла вгору, тобто значення функції f в точці x більше за її середнє значення в точках $x\pm\varepsilon$ для достатньо малих ε. Довести таке узагальнення цієї властивості на тривимірний випадок: нехай функція $f(\boldsymbol{r})$ двічі диференційовна в околі точки A і $\Delta f|_A<0$. Тоді значення функції f в точці A більше за її середнє значення в точках на поверхні сфери достатньо малого радіусу ε з центром в A. Випадок $\Delta f|_A>0$ є аналогічним. [7]

200. Використовуючи результат попередньої задачі, довести, що якщо в обмеженій області $\Delta f(\boldsymbol{r})=0$, то функція f досягає свого максимального та мінімального значень лише на межі області (аналогічне твердження виконано і в загальному випадку функції n змінних). [2]

201. Нехай крива ℓ є колом $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y-z=0$. Використовуючи симетрії цієї кривої, обчислити такі інтеграли по ℓ:

$$\text{а) } I_{xx}=\oint_\ell x^2 dl\,,\quad \text{б) } I_{xy}=\oint_\ell xy\,dl\,,\quad \text{в) } I_{xz}=\oint_\ell xz\,dl\ . \quad [15]$$

202. Обчислити такі криволінійні інтеграли:

а) $\displaystyle\int_\ell |y|\,dl$, де $\ell = \{x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=ax\}$ [3] ;

б) $\displaystyle\int_\ell (x^3+y^3)\,dl$, де $\ell = \{\,(x^2+y^2)^2 = 2axy,\ x,y\geq 0\}$ [3];

в) $\displaystyle\int_\ell x\,dl$, де $\ell = \{\,r = 1+\cos\varphi\,\}$ [3] ;

г) $\displaystyle\int_\ell (x+y+z)\,dl$, де $\ell = \{\,x^2+y^2+z^2=a^2,\ |y|=x,\ z\geq 0\,\}$ [3].

203. Знайти інтеграли $\int y\,dl$ й $\int (x^2-y^2)\,dl$ по кривій $r = a\sin 3\varphi$. [7]

204. Нехай ℓ є замкнутою кривою на площині, а A — фіксованою точкою цієї площини. Обчислити інтеграл $\oint_\ell (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dl$, де $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор, проведений з точки A до точки кривої, $\boldsymbol{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до кривої в цій точці. Розглянути випадки, коли точка A знаходиться: а) всередині кривої ℓ; б) зовні кривої ℓ. [5]

205. Нехай ℓ є замкнутою кривою на площині. Як потрібно вибрати точку A на цій площині, щоб інтеграл $\oint_\ell r^2\boldsymbol{n}\,dl$, де r — віддаль від точки A до точки кривої, а $\boldsymbol{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до кривої в цій точці, набував найменшого за модулем значення? Обчислити це найменше значення. [7]

206. Знайти інтеграл вздовж ламаної ℓ, яка проходить через точки $A(1,0,0), B(0,1,0)$, $C(-1,0,0)$, $D(0,-1,0)$, $E(0,0,1)$ та $F(0,0,-1)$:

а) $\displaystyle\int_\ell yz\sin(xy)\,dx + xz\sin(xy)\,dy - \cos(xy)\,dz$, де $\ell = EABCDF$ [4] ;

б) $\displaystyle\int_\ell z\,dx + x\,dy + y\,dz$, де $\ell = ABEACDECBDA$ [5] ;

в) $\displaystyle\int_\ell (2x-z)\,dx + 2y\,dy + (z+y)\,dz$, де $\ell = ABCDEA$ [4] .

207. Знайти інтеграл $\oint 2yz\,dx + (x^2-yz)\,dy + (xy-xz)\,dz$ вздовж кривої $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, $z\geq 0$, $a>0$, з обходом проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатнього напрямку осі x. [5]

208. Знайти похідну функції $u = xy + z/y$ в точці $M(2,1,2)$ в напрямку градієнта функції $v = xyz$ в цій точці. [2]

209. Довести рівність $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$, якщо $|\boldsymbol{a}| = \mathrm{const}$. [3]

210. Знайти загальний вид функцій $f(\boldsymbol{r})$ та $\boldsymbol{a}(x,y,z)$, для яких виконано такі рівняння:

а) $\operatorname{div} \boldsymbol{r} f(\boldsymbol{r}) = 0$ [3] ; б) $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} f(\boldsymbol{r}) = 0$ [3] ;

в) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = (x - 2z, y - 2z, x + y - 2z)$ [5] .

211. Обчислити $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ та $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ для таких векторів ($\boldsymbol{c}$ — сталий вектор): а) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r})/r^3$ [4] ; б) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\ln r$ [3] ; в) $\boldsymbol{a} = r(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r})$ [4] .

212. Показати, що наступні інтеграли по всьому простору $\mathbb{R}^3$ дорівнюють нулю, якщо $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$ та функції $\boldsymbol{a}$ і φ "досить швидко" прямують до нуля при $r \to \infty$ (при цьому для кожного з інтегралів вказати, як швидко повинні прямувати ці функції до нуля):

а) $\int \boldsymbol{a}\, dV$ [4] ; б) $\int (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a})\, dV$ [4] ; в) $\int (\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{a})\, dV$ [4] .

213. Знайти потік $\iint x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$ через зовнішню поверхню тора (розміри тора вважати заданими). [3]

214. Обчислити такі поверхневі інтеграли (∂V — межа області V; $\boldsymbol{n}$ — одиничний вектор нормалі до цієї межі, $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — сталі вектори):

а) $\iint_{\partial V} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n})\, dS$ [5] ; б) $\iint_{\partial V} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n})\, dS$ [5] .

215. Для сфери $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ виразити інтеграл $\iint_\Sigma f(x,y,z)\, dS$ по її поверхні через інтеграл по кулі всередині неї. [5]

216. Знайти потік $\iint (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS$ поля $\boldsymbol{a}$ через поверхню $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $x^2 + y^2 \le R^2$, якщо $\boldsymbol{a} = (3,2,1)$ та $\boldsymbol{a} = (yz, xz, xy)$. [7]

§7. Числові та функціональні ряди

217. Знайти суми наступних рядів[2]:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ [3] ; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n-2}$ [4] ;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ [3] ; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $|x|<\pi$ [5] ;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n!}$ [3] ; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n(n+1)}$, $|x|<\pi$ [5] ;

є) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^n|x|}{2^n n!}$ [3] ; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\cos(nx+b)$, $|a|<1$ [4] ;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$ [4] ; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ [5] ;

й) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2-1}$ [6] ; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^2-n^2}$, $a\notin\mathbb{Z}$ [10] .

218. Дослідити на збіжність ряд $\sum a_n$, якщо:

а) $a_n=\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ [2] ; б) $a_n=\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ [2] ;

в) $a_n=\displaystyle\int_n^{n+2}\frac{x^2e^{-\sqrt[4]{x}}}{1+x}\,dx$ [3] ; г) $a_n=\displaystyle\int_n^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ [4] ;

д) $a_n=\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{e^{-nx}}{\ln^2 x}\,dx$ [7] .

219. При яких значеннях параметра p збігаються такі ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ [7] ; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{n^p}$ [7] .

---

[2] Для довідок: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

220. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряди:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos\frac{\pi n}{4})^n}{n^\alpha}$ [3] ; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$ [3] ;

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^{\ln n}$ [4] ; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\ln^\alpha(n+1)}$ [4] ;

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^\alpha n}{n}\sin n$ [5] ; е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\sin n}{n^\alpha\ln n}\right)$ [5] .

221. Вказати збіжний ряд $\sum a_n$, для якого ряд $\sum a_n^3$ є розбіжним. [5]

222. Розглянемо ряд $\sum \varepsilon_n/n$, де ε_n — незалежні випадкові величини, які з однаковою ймовірністю набувають значень ±1. Обчислити ймовірність того, що цей ряд розбігається. Для його суми S знайти середні значення $\langle S^2\rangle$ та $\langle S^4\rangle$. [10]

223. В гармонійному ряді $1+1/2+1/3+\ldots+1/n+\ldots$ викреслимо всі доданки $1/n$, у яких десятковий запис числа n має цифру 9. Довести, що отриманий таким чином ряд збігається. [10]

224. Доозначимо функцію $f(x)=e^{-1/x^2}$ значенням $f(0)=0$. Отримана $f(x)$ нескінченно диференційовна, причому $f^{(n)}(0)=0$, $n=0,1,2,\ldots$ Тому всі доданки ряду Маклорена цієї функції є нульовими, звідки ряд збігається при всіх x і його сума тотожно дорівнює нулю. Отже ряд Маклорена функції $f(x)$ збігається, але не до $f(x)$. Чи не суперечить це теоремі про розклад функції в ряд Тейлора? [5]

225. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum a_n(x)$, якщо:

а) $a_n(x)=(x/\sin n)^n$ [3] ; б) $a_n(x)=1/2-x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$ (n степенів) [5] ;

в) $a_n(x)=\sin\sin\ldots\sin x$ (n композицій) [10] .

226. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність функціональні ряди:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{x^{\ln n}}$ $(x>0)$ [4] ; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ [7] .

227. Знайти область збіжності гіпергеометричного ряду [3]:

$$1 + \frac{ab\,x}{c \cdot 1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)\,x^2}{c(c+1)\cdot 2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)\,x^3}{c(c+1)(c+2)\cdot 3!} + \ldots$$

228. Знайти помилку в доведенні такого твердження: для будь-якої $f(x)$, для якої ряд Маклорена збігається при всіх x, виконано рівність

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} f(x)\,dx = 0\,,$$

якщо цей інтеграл збігається.

Доведення. За умовою $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ при всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Тому

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin x^{1/4} x^n\,dx = 0\ ,$$

оскільки (довести це!) при будь-якому n інтеграл під знаком суми дорівнює нулю. [5]

§8. Інтеграли з параметром

229. Чи випливає із збіжності $\int_1^\infty f(x)\,dx$ збіжність таких інтегралів:

а) $\displaystyle\int_1^\infty f^3(x)\,dx$ [3] ; б) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|f(x)|}{x^2}\,dx$ [3] ; в) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx$ [3] .

230. При яких значеннях параметрів α та β збігаються інтеграли:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |x-1|^\alpha |x+1|^\beta\,dx$ [4] ; б) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \operatorname{arctg} \frac{x^3}{1+x^\beta}\,dx$ [5] ;

в) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha \sin x\,dx}{\left(\operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{x}{1+x}\right)^\beta}$ [7] .

231. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність при всіх значеннях параметра α наступні інтеграли:

$$\text{а)}\ \int_2^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^\alpha + \ln x}\quad [3]\ ;\quad \text{б)}\ \int_0^\infty \frac{\sin\ln x}{x^\alpha}\cdot\sin x\,dx\quad [3]\ ;$$

$$\text{в)}\ \int_0^\infty \frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\,dx\quad [4]\ .$$

232. Дослідити на неперервність відносно $a\in\mathbb{R}$ такі інтеграли:

$$\text{а)}\ \int_0^\infty \frac{\cos(ax^2)}{1+x^2}\,dx\quad [3]\ ;\quad \text{б)}\ \int_0^1 \frac{a\,e^{\sin x}}{x^2+a^2}\,dx\quad [3]\ .$$

§9. Ряд і інтеграл Фур'є

233. Представити періодичну функцію $y=\ln(1-2q\cos x+q^2)$, $(|q|<1)$, її тригонометричним рядом Фур'є. [5]

234. Знайти образи Фур'є для наступних функккцій:

$$f(x)=e^{-x^2/2}\ [3]\ ;\quad f(x)=\delta(x-x_0)\ [2]\ ;\quad f(x)=e^{-x^2/2}\cos(ax)\ [4]\ .$$

235. Знайти образи Фур'є наступних тривимірних потенціалів:

а) $V(\boldsymbol{r})=V_0\,e^{-qr}/r$ (потенціал Юкави) [5] ;

б) $V(\rho)=V_0\,(1-3\cos^2\theta)\,/\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3$, де $\cos\theta=\boldsymbol{e}_d\cdot\boldsymbol{e}_\rho$,
а $\boldsymbol{e}_\rho=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ (диполь-дипольна взаємодія) [15] .

236. Використовуючи перетворення Фур'є розв'язати такі інтегральні рівняння (знайти невідому функцію $\varphi(x)$):

$$\text{а)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\varphi(x-t)dt=e^{-x^2}[4]\ ;\quad \text{б)}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos(xt)dt=\frac{1}{a^2+x^2}\ [5]\ ;$$

$$\text{в)}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\sin(xt)dt=e^{-x}\quad [5]\ ;\quad \text{г)}\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-|x-t|}dt=xe^{-|x|}\ [6]\ .$$

237. За допомогою перетворення Фур'є знайти той розв'язок диференціального рівняння $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2 x=f(t)$ (де $\beta>0$ та $\omega^2>\beta^2$, а змінна t означає час), який обертається в нуль при $f(t)\equiv 0$. [4]

238. За допомогою перетворення Фур'є знайти той розв'язок системи диференційних рівнянь, який обертається в нуль при $f(t)\equiv 0$:

а) $\begin{cases} \dot{x}+2x &= y \\ \dot{y}+2y &= x-f(t) \end{cases}$ [5] ; б) $\begin{cases} \dot{x}+3x &= y \\ \dot{y}+4x &= 2y-3f(t) \end{cases}$ [5] .

239. Використовуючи перетворення Фур'є, отримати такий розв'язок диференціального рівняння $\Delta\boldsymbol{A}=-4\pi c^{-1}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, (де $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ є заданою функцією координат), для якого $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\to 0$ при $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\to 0$. [5]

§10. Теорія функцій комплексної змінної

240. Обчислити значення таких величин:

а) $(3-4i)^{1+i}$ [2] ; б) $\ln\left(\dfrac{1+i^{1001}}{\sqrt{2}}\right)$ [2] ; в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{i}{2}\ln 3\right)$ [2] .

241. Для яких z всі значення функції $\arcsin z$ дійсні? [3]

242. Знайти $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ та $|f(z)|$ для функції $f(z)=\sin z$. [3]

243. Розв'язати наступні рівняння:

а) $\operatorname{ctg} z=-3i/5$ [3] ; б) $2\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z=i$ [3] ; в) $\sin z=i\operatorname{sh} z$ [3] .

244. Знайти множину розв'язків наступних рівнянь:

а) $|z+\sqrt{1+z^2}|=1$ [5] ; б) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|<1$ [5] .

245. Спираючись на геометричні міркування довести, що обидва значення $\sqrt{z^2-1}$ лежать на прямій, яка проходить через початок координат та є паралельною до бісектриси внутрішнього кута трикутника з вершинами в точках -1, 1 та z, проведеної з точки z. [4]

246. Нехай початкове значення $\arg f(z)$ в точці $z=2$ дорівнює нулю. Точка z робить один повний оберт проти годинникової стрілки по колу з центром в початку координат і повертається в точку $z = 2$. Знайти значення $\arg f(z)$ після вказаного оберту для наступних функцій:

$$\text{а) } \sqrt{z^2+2z-3}\ [3]\ ;\quad \text{б) } \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\ [3]\ ;\quad \text{в) } \ln\left(z+\frac{1}{z}\right)\ [3]\ .$$

247. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$, якщо

а) $u(x,y) = x^2 + y^2 + 5x + y$; [2]

б) $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$; [2]

в) $2u(x,y) + v(x,y) = x^2 - y^2$. [3]

248. Знайти аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\arg f(z) = x^2 - y^2$. [3]

249. Яким умовам має задовольняти функція $g(x,y)$ для того, щоб для деякої аналітичної функції $f(z) = u + iv$, було виконано рівність:

а) $au + bv = g(x,y)$, де a та b — задані комплексні числа; [4]

б) $\sqrt[n]{u^2+v^2} = g(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$. [4]

250. Будь-яку функцію $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ можна представити як функцію від змінних z та z^* у вигляді

$$f = u\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) + i\,v\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) = F(z,z^*)\ .$$

Довести, що умова диференційовності функції f в точці z_0 еквівалентна рівнянню

$$\frac{\partial F(z_0, z_0^*)}{\partial z^*} = 0\ .$$

Як виражається через функцію $F(z,z^*)$ значення похідної $f'(z_0)$? [4]

251. Знайти значення z, при яких наступні функції $f(z)$ є диференційовними, та обчислити відповідні похідні $f'(z)$:

а) $f(z) = z^*(z-a)$ [3] ; б) $f(z) = z^2 \arg z$ [3] ; в) $f(z) = \ln|z|$ [3] .

252. Нехай $\overrightarrow{E} = (u(x,y), v(x,y))$ є плоским векторним полем. Поставимо йому у відповідність комплекснозначну функцію $E = u + iv$. Довести, що система диференціальних рівнянь

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0 \ , \quad \operatorname{rot} \overrightarrow{E} = 0$$

еквівалентна одному рівнянню $\partial E / \partial z = 0$, загальний розв'язок якого $E = E(z^*)$ є довільною функцією від змінної $z^* = x - iy$. [5]

253. Знайти при $-\pi < \varphi < \pi$ суму таких рядів:

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \ [4] \ ; \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\varphi}{n} \ [4] \ .$$

254. Розкласти функцію $z^2/(1+z)^2$ в ряд по степенях $(z-1)$. [3]

255. Розкласти функцію $(1+z^2)^{-2}$ в ряд Лорана в околі точок $z = i$ та $z = \infty$. [5]

256. Знайти область збіжності наступних функціональних рядів:

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!} \ [2] \ ; \quad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{2^n} \ [2] \ ; \quad \text{в)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2^n} \left(\frac{z}{1+z} \right)^{n!} \ [3] \ .$$

257. Знайти радіус збіжності ряда Маклорена для таких функцій:

$$\text{а)} \ f(z) = \ln \frac{\sin z}{z} \ [3] \ ; \quad \text{б)} \ f(z) = \frac{\ln(2 + \sin z)}{z^2 + 4} \ [5] \ .$$

258. Знайти особливі точки наступних функції (а у випадку полюсів вказати їх порядок):

$$\text{а)} \ f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \ [3] \ ; \quad \text{б)} \ f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2} \ [3] \ ;$$

$$\text{в)} \ f(z) = e^{\operatorname{ctg} 1/z} \ [4] \ ; \quad \text{г)} \ f(z) = \frac{1}{\ln(z^2 - 4z + 5)} \ [5] \ .$$

259. Знайти лишки наступних функцій відносно всіх ізольованих особливих точок та точки $z = \infty$:

$$\text{а)} \ f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} \ [4] \ ; \quad \text{б)} \ f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)} \ [3] \ ;$$

$$\text{в)} \ f(z) = z \operatorname{ctg} z^2 \ [4] \ ; \quad \text{г)} \ f(z) = e^{z + 1/z} \ [4] \ .$$

260. Знайти лишки відносно всіх ізольованих особливих точок та точки $z = \infty$ для функції

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\sqrt[3]{\frac{z^4}{1+z}}$$

у випадку розрізу вздовж відрізка $[-1, 0]$ та умови $\arg\{z^4/(1+z)\} = 0$ на верхньому березі. [10]

261. Обчислити наступні контурні інтеграли:

а) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, де C — коло $|z-2| = 1/2$; [3]

б) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, де C — коло $|z| = 2$; [3]

в) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^*}\,dz$, де C — контур, зображений на рис. 1.1 ; [3]

г) $\displaystyle\int_C \ln[\,z(z^2-4)\,]\,dz$, де C — контур, зображений на рис. 1.2 . [7]

В останньому випадку C — це контур, який починається в точці $z = 3$ та закінчується в точці $z = -1$. При цьому вважаємо, що при $z = 3$ буде $\ln[\,z(z^2-4)\,] = \ln 15$.

Рис. 1.1: Контур до № 261(в).

Рис. 1.2: Контур до № 261(г).

262. Обчислити наступні інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+8x^2+16}\,dx$ [5] ; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$ [3] ;

в) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3}$ [5] ; г) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(x+1)^2}$, $(-1<p<1)$ [5] ;

д) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x^n)^2}$ [8] ; е) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,\ 0<a<1$ [5] ;

є) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ [5] ; ж) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}{1+x^2}\,dx$ [8] ;

з) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}\frac{dx}{1+x^2}$ [7] ; и) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{tg}(x+ia)\,dx$, $\Im m\, a=0$ [5] ;

і) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$ [7] ; й) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{x+a}$, $a>0$ [6] ;

к) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\ln x}{x^2+a^2}\,dx$ [6] ; л) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(b+a\cos\varphi)\,d\varphi}{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}$, $|a|\neq|b|$ [5] ;

м) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+a^2)}\,dx$ [6] .

263. За допомогою теорії лишків знайти суми рядів

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ [5]\ ; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\ [5]\ .$$

264. Знайти асимптотичну поведінку при $\lambda\to+\infty$ таких інтегралів:

$$\text{а)}\ \int_0^1 e^{i\lambda x}\ln x\,dx\ [5]\ ; \qquad \text{б)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{1+x^{2n}}}\,dx\ [10]\ .$$

265. Розв'язати операційним методом

а) $x''-2x'+2x=1$, $x(0)=x'(0)=0$; [3]

б) $x''-2x'=e^{-2t}$, $x(0)=x'(0)=0$; [3]

в) $x''+4x'+4x=2e^{-2t}\sin t$, $x(0)=-1,\ x'(0)=1$; [3]

г) $x''+tx'-(t+1)x=0$, $x(0)=x'(0)=1$; [4]

д) $x''+(t+1)x'+tx=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$; [4]

е) $tx''+(2t-1)x'+(t-1)x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$. [5]

§11. Метричні, нормовані та евклідові простори

266. Нехай $d(x,y)$ є метрикою на множині X. Довести властивості:

а) $|d(x,y)-d(x,z)| \leq d(y,z)$; [1]

б) $|d(x,u)-d(y,v)| \leq d(x,y)+d(u,v)$; [2]

в) якщо $x_n \to x$ та $y_n \to x$, то $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$. [3]

267. Нехай множина X є метричним простором з метрикою $d(x,y)$. Довести такі властивості:

а) будь-яка збіжна послідовність $x_n \in X$ обмежена; [2]

б) будь-яка фундаментальна послідовність $x_n \in X$ обмежена; [3]

в) якщо для послідовностей $x_n, y_n \in X$ виконано $d(x_n,y_n) \to 0$ та $x_n \to x$, то $y_n \to x$; [2]

г) якщо для послідовностей $x_n, y_n \in X$ виконано $d(x_n,y_n) \to 0$ та x_n фундаментальна, то y_n також фундаментальна. [2]

268. Нехай $d(x,y)$ є метрикою на множині X, тоді для будь-яких елемента $x \in X$ та множини $A \subset X$ визначено функцію

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\} ,$$

яку називають *віддаллю від точки x до множини A*. Довести що для $d(x,A)$ виконано такі властивості:

а) $|d(x_1,A)-d(x_2,A)| \leq d(x_1,x_2)$; [3]

б) функція $f(x) = d(x,A)$, де множину $A \subset X$ фіксовано, є рівномірно неперервною функцією від $x \in X$; [1]

в) для будь-якого c множини $\{x : d(x,A) < c\}$ та $\{x : d(x,A) > c\}$ відкриті, а $\{x : d(x,A) \leq c\}$ та $\{x : d(x,A) \geq c\}$ — замкнені; [2]

г) якщо множина A замкнена, то $d(x,A) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x \in A$; [2]

д) $d(x,A) = d(x,\overline{A})$, де $\overline{A}$ є замиканням множини A ; [2]

е) якщо множина $A \subset X$ є компактною, то для будь-якого елемента $x \in X$ в множині A існує найближчий елемент до x, тобто такий елемент $a_x \in A$, що $d(x,A) = d(x,a_x)$. [3]

269. Нехай множина X є метричним простором з метрикою $d(x,y)$, множини A_1 та A_2 є замкненими, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Довести, що функція

$$\varphi(x) = \frac{d(x,A_1)}{d(x,A_1) + d(x,A_2)}$$

має наступні властивості:

а) функція $\varphi(x)$ неперервна; [2]

б) $\varphi(X) = [0,1]$, причому $\varphi(x) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x \in A_1$, та $\varphi(x) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $x \in A_2$; [3]

в) множини $B_1 = \{x : \varphi(X) < 1/2\}$ та $B_2 = \{x : \varphi(X) > 1/2\}$ відкриті, причому $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ та $B_1 \cap B_2 = \varnothing$; [2]

г) для будь-яких замкнених A_1 та A_2, для яких $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, існують такі відкриті околи $B_1 \supset A_1$ та $B_2 \supset A_2$, що $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. [1]

270. Нехай $d(x,y)$ є метрикою на множині X, тоді для будь-яких множини $A, B \subset X$ визначено функцію

$$d(A,B) = \inf\{\, d(x,y) : x \in A, y \in B \,\} \ ,$$

яку називають *віддаллю між множинами A та B*. Довести, що якщо множина A є замкненою, а B — компактною, то $d(A,B) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $A \cap B \neq \varnothing$. Навести приклад таких замкнених $A, B \subset \mathbb{R}^2$, що $A \cap B = \varnothing$, але $d(A,B) = 0$. [7]

271. Навести приклади множин з $A_n \subset \mathbb{R}$ з такими властивостями:

а) всі множини A_n є відкритими, а перетин $\bigcap\limits_1^\infty A_n$ — замкнена; [2]

б) всі множини A_n є замкненими, а множина $\bigcup\limits_1^\infty A_n$ — відкрита. [2]

272. Довести наступні твердження щодо структури відкритих множин у відповідних метричних просторах:

а) будь-яка непорожня відкрита множина G в сепарабельному метричному просторі є об'єднанням скінченної або зліченної кількості відкритих куль; [2]

б) будь-яка непорожня відкрита множина $G \subset \mathbb{R}$ є об'єднанням скінченної або зліченної кількості інтервалів $(a,b) \subset \mathbb{R}$, які не перетинаються. [5]

273. Довести, що в сепарабельному метричному просторі будь-який набір $\{G_\alpha,\ \alpha \in A\}$ непорожніх відкритих множин, які попарно не перетинаються, є скінченним або зліченним. [4]

274. Нехай X та Y є метричними просторами з метриками d_x та d_y. Відображення $f : X \to Y$ називають *ізометричним*, якщо $f(X) = Y$ та $d_y(f(x_1), f(x_2)) = d_x(x_1, x_2)$. Довести, що таке відображення обов'язково взаємно однозначне та неперервне, а обернене відображення $f^{-1} : Y \to X$ також є ізометничним. [3]

275. Метричний простір X є повним тоді й тільки тоді, коли перетин будь-якої послідовності $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ вкладених замкнених куль, для радіусів яких виконано $r_n \to 0$, є непорожнім. [5]

276. Нехай X — компактний метричний простір, Y — довільний метричний простір, а $f : X \to Y$ — неперервна функція. Довести наступні твердження:

а) $f(X)$ — компактна множина в Y; [2]

б) якщо $Y = \mathbb{R}$, то $f(x)$ має на X найбільше та найменше значення, тобто існують такі $x_{min} \in X$ та $x_{max} \in X$, що $f(x_{min}) = \min_{x\in X} f(x)$ та $f(x_{max}) = \max_{x\in X} f(x)$; [2]

в) $f(x)$ рівномірно неперервна на множині X. [4]

277. Довести, що кожна з наступних функцій $\|x\|$, де $x = (x_1, \ldots, x_n)$, є нормою в лінійному просторі $\mathbb{R}^n$:

а) $\|x\| = \sum_1^n |x_k|$; [2] б) $\|x\| = \sqrt{\sum_1^n x_k^2}$; [3]

в) $\|x\| = \max\limits_k |x_k|$; [2] г) $\|x\| = \left(\sum_1^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, де $p > 1$. [4]

Довести також наступні твердження щодо зв'язку різних норм в $\mathbb{R}^n$:

д) $\left(\sum_1^n x_k^p\right)^{1/p} \to \max |x_k|$ при $p \to +\infty$; [5]

е) всі норми в n-вимірному лінійному просторі еквівалентні. [10]

278. Перевірити, що наступні множини нескінченних числових послідовностей є лінійними просторами, а відповідні функції $\|x\|$, де $x = (x_1, x_2, \ldots)$, є нормами в цих просторах:

а) l_1 — множина всіх таких послідовностей, що $\sum_1^\infty |x_k| < +\infty$, а $\|x\| = \sum_1^\infty |x_k|$; [2]

б) l_p $(p > 1)$ — множина таких послідовностей, що $\sum_1^\infty |x_k|^p < +\infty$, а $\|x\| = \left(\sum_1^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$; [2]

в) нехай $p < q$, тоді якщо $\sum_1^\infty |x_k|^p < +\infty$, то $\sum_1^\infty |x_k|^q < +\infty$, тобто $l_p \subset l_q$; [3]

г) $\mathcal{M}$ — множина всіх обмежених послідовностей, причому $\|x\| = \sup\{\,|x_k| : 1 \le k < +\infty\,\}$. [2]

279. Перевірити, що наступні множини числових функцій є лінійними просторами, а відповідні функції $\|\,f\,\|$ — нормами в цих просторах:

а) $\mathcal{M}(X)$ — множина всіх обмежених функцій $f : X \to \mathbb{R}$, а для будь-якої такої функції $\|\,f\,\| = \sup\limits_{x \in X} |\,f(x)\,|$; [3]

б) $C[a,b]$ — множина всіх функцій, неперервних на $[a,b]$, причому $\|\,f\,\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\,f(x)\,|$; [3]

в) $C^1[a,b]$ — множина всіх таких функцій $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, що $f(x)$ та $f\,'(x)$ неперервні на $[a,b]$, причому

$$\|\,f\,\| = \max_{x\in[a,b]} |\,f(x)\,| + \max_{x\in[a,b]} |\,f\,'(x)\,| \; ; \quad [3]$$

г) $C^n[a,b]$ — множина всіх таких функцій $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, що $f(x)$ та її похідні $f\,'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ неперервні на $[a,b]$, причому

$$\|\,f\,\| = \max_{x\in[a,b]} |\,f(x)\,| + \max_{x\in[a,b]} |\,f\,'(x)\,| + \ldots + \max_{x\in[a,b]} |\,f^{(n)}(x)\,| \; . \quad [3]$$

Довести, що всі наведені простори є повними [по 8 балів за простір].

280. Нехай L є лінійним нормованим простором, а L_o — його лінійним підпростором. Довести наступні твердження:

а) якщо $\dim L_o = n$, то лінійний підпростір L_o є замкненим; [5]

б) замикання $[L_o]$ лінійного підпростору L_o є замкненим лінійним підпростором. [3]

281. Нехай X є метричним простором, а $C(X) \subset \mathcal{M}(X)$ — множиною всіх обмежених неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ з нормою $\|\,f\,\| = \sup\{\,|\,f(x)\,| : x \in X\,\}$. Довести, що $C(X)$ є лінійним нормованим простором, який є підпростором простору $\mathcal{M}(X)$. [3]

282. Нехай лінійний нормований простір L є повним, тоді зі збіжності ряду $\sum_1^\infty \|x_k\|$ завжди випливає збіжність ряду $\sum_1^\infty x_k$. [3]

283. Довести наступні твердження щодо простору $C[a,b]$:

а) множина $\mathcal{P}$ всіх многочленів є лінійним підпростором простору $C[a,b]$, причому $[\mathcal{P}] = C[a,b]$, тобто множина $\mathcal{P}$ є щільною в просторі $C[a,b]$; [2]

б) множина всіх неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій є лінійним підпростором простору $C[a,b]$ та є щільною в цьому просторі; [1]

в) простір $C[a,b]$ є повним та сепарабельним. [4]

284. Для довільної функції $f \in C[a,b]$ розглянемо $Af = f(a)$. Довести:

а) функціонал $Af = f(a)$ є лінійним та неперервним на $C[a,b]$; [3]

б) множини $\{ f : f(a) < c \}$ та $\{ f : f(a) > c \}$ відкриті в $C[a,b]$; [2]

в) множини $\{ f : f(a) \le c \}$ та $\{ f : f(a) \ge c \}$ замкнені в $C[a,b]$. [2]

285. Для довільної функції $f \in C[a,b]$ розглянемо інтегральний функціонал $Af = \int_a^b f(t)dt$. Довести:

а) цей функціонал є лінійним та неперервним на $C[a,b]$; [3]

б) множина $\{ f : \int_a^b f(t)dt < c \}$ є відкритою в $C[a,b]$; [1]

в) множина $\{ f : \int_a^b f(t)dt \le c \}$ є замкненою в $C[a,b]$. [1]

286. Для узагальнення простору $\mathbb{R}^n$ розглянемо множину X всіх таких послідовностей $x_k \in \mathbb{R}$, що $\sum_1^\infty x_k^2 < +\infty$. Довести твердження:

а) множина X є лінійним простором; [1]

б) для будь-яких послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ та $y = (y_1, y_2, \ldots)$ з X визначено величину $(x,y) = \sum_1^\infty x_k y_k$, для якої виконано всі властивості скалярного добутку. [2]

Отже, множина X з так означеним скалярним добутком є евклідовим простором. Цей простір позначають l_2. Довести, що простір l_2 є *повним* та *сепарабельним.* [8]

287. Довести, що простір l_p $(p \ge 1)$ є *повним* та *сепарабельним.* [5]

288. Довести, що простір $\mathcal{M}$ всіх обмежених послідовностей з метрикою $d(x,y) = \sup\{ |x_k - y_k| : 1 \le k < +\infty\}$, де $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{M}$ та $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \mathcal{M}$, є повним та несепарабельним. [8]

289. Довести, що в просторі $C[a,b]$ некомпактними є такі множини:

а) множина $\{x^n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ в $C[0, 1]$; [2]

б) одинична замкнена куля $V_1 = \{x : \|x\| \leq 1\}$. [2]

290. Довести, що одинична замкнена куля $V_1 = \{x : \|x\| \leq 1\}$ в просторі l_p є некомпактною множиною. [5]

291. В банаховому просторі l_p розглянемо множину $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, де n-та координата елемента a_n дорівнює $1 + 1/n$, а решта — нулі, тобто $a_1 = (2, 0, 0, \ldots)$, $a_2 = (0, 3/2, 0, \ldots)$ тощо. Довести твердження:

а) оскільки $d(a_n, a_m) > 1$ для будь-яких m та n, то множина A не має граничних точок та є замкнутою; [3]

б) $d(\widehat{0}, A) = 1$, але в множині A немає найближчого до $\widehat{0} = (0, 0, , \ldots)$ елемента. [1]

292. Довести, що замкнена множина $K \subset l_p$ є компактнною тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_ε, що для будь-якого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in K$ буде $\sum_{n_\varepsilon}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p$. [5]

293. Нехай H — гільбертів простір, $L \subset H$ — його підпростір, причому $L \neq H$. Довести такі твердження щодо відстані $d(x, L)$:

а) якщо $x \perp L$, то $d(x, L) = \|x\|$; [2]

б) для довільного $x \in H$ буде $d(x, L) = \|x_\perp\|$, де $x = x_L + x_\perp$ є розкладом елемента x на $x_L \in L$ та $x_\perp \perp L$. [3]

Бібліографія

[1] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, — М.: Наука (довільне видання).

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, — М.: Наука (будь-яке видання).

[3] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа — М. Высшая школа (будь-яке видання).

[4] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу, т. 1–3, — М.: Физматлит (будь-яке видання).

[5] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Главн. ред. физ-мат. лит., 1992.

Зміст