Даний посібник містить задачі з векторної алгебри, аналітичної геометрії, лінійної алгебри, тензорної алгебри та тензорного аналізу, які пропонуються протягом останніх декількох років студентам фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка для додаткової самостійної роботи. При цьому ставиться завдання поглиблення знань студентів з цих дисциплін та розвиток їх творчих здібностей за рахунок розв'язування складніших задач.

Частину запропонованих задач взято з відомих підручників та задачників (в основному з [2]), [3]) та [4]), решта є оригінальними.

Кожну задачу в залежності від рівня її складності оцінено певною кількістю балів. Хоча значна частина завдань має підвищений рівень складності, проте для їх розв'язання досить теоретичних знань, отриманих на лекціях або з стандартних підручників типу [1].

Всі завдання розділено на чотири модулі, які студенти виконують і здають паралельно до вивчення відповідного теоретичного матеріалу. Перші два модулі виконуються в першому семестрі, Інші два — в другому. Орієнтовний графік складання модулів:

1) векторна алгебра — до 25 жовтня;
2) аналітична геометрія — до 25 грудня;
3) лінійна алгебра — до 15 квітня;
4) геометрія n-вимірного простору, тензорна алгебра — до 25 травня.

Результати цієї роботи безпосередньо враховуються при обчисленні підсумкових семестрових оцінок з названих дисциплін. Але оскільки ці задачі є додатковими до звичайної загальної програми, то за них доцільно братися лише тим студентам, які впевнено справляються з цією загальною програмою. Відповідно ці додаткові задачі приймаються та бали за їх виконання зараховуються лише тим студентам, поточна оцінка у яких — не нижче міцного "добре" (це приблизно 80–85 балів за 100-бальною шкалою).

ГЕОМЕТРІЯ ТА АЛГЕБРА

§1. Векторна алгебра

1. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (4, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -5)$ та $\vec{c} = (-1, 1, 1)$ утворюють базис у просторі. Знайти координати векторів $\vec{l} = (4, 4, -5)$, $\vec{m} = (2, 4, -10)$ та $\vec{n} = (0, 3, -4)$ у цьому базисі. [3]

2. У паралелограмі $ABCD$ точка K є серединою відрізка BC, а точка O — точкою перетину діагоналей. Взявши за базис вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AD}$, знайти у цьому базисі координати векторів $\overline{BD}$, $\overline{CO}$, $\overline{KD}$. [4]

3. У трикутнику ABC точка M — середина відрізку AB, а точка O — точка перетину медіан. Приймаючи за базисні вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ знайти у цьому базисі координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. [4]

4. У трапеції $ABCD$ довжини основ AD і BC співвідносяться як $3 : 2$. Приймаючи за базисні вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$, знайти у цьому базисі координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. [4]

5. В тетраедрі $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q — середини ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC відповідно, S — точка перетину мередіан трикутника ABC. Приймаючи за базисні вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ знайти у цьому базисі кординати:
1) векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$; 2) векторів $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{NC}$, $\overline{MP}$, $\overline{KQ}$;
3) векторів $\overline{OS}$, $\overline{KC}$. [5]

6. У трикутнику ABC проведено бісектрису AD. Знайти координати вектора $\overline{AD}$ у базисі, утвореного векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. [5]

7. Довести, що радіус-вектор центру правильного багатокутника є середнє арифметичне радіус-векторів його вершин. [5]

8. Знаючи радіус-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ трикутника знайти радіус-вектор центра кола, вписаного у трикутник. [5]

9. Однорідний дріт зігнуто у вигляді кута AOB з сторонами $|OA| = a$ та $|OB| = b$. Знайти координати центру тяжіння дроту в системі координат $O, OA/a, OB/a$. [5]

10. нехай точки K та L є серединами сторін AB та BC паралелограма $OABC$. Довести, що точка перетину діагоналей $OABC$ співпадає з точкою перетину медіан трикутника OKL. [5]

11. На сторонах AB, BC та CA трикутника ABC взяті відповідні точки M, N, P так, що $|AM| = |AB|/n$, $|BN| = |BC|/n$, $|CP| = |CA|/n$. Площа трикутника ABC дорівнює S. Знайти площу трикутника отриманого при перетині прямих AN, BP і CM. Вивести звідси, що медіани трикутника перетинаються в одній точці. [5]

12. Довести, що чотири відрізка, що сполучають вершини тетраедра з точками перетину медіан протилежних граней, перетинаються в одній точці і діляться у цій точці у співвідношенні $3:1$. [5]

13. Дано три вектори $\vec{a} = (-1,-1,1)$, $\vec{b} = (5,1,1)$ та $\vec{c} = (0,3,-2)$. Обчислити величини $|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - (\vec{a},\vec{b})(\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{a},\vec{c})(\vec{a},\vec{b}) + |\vec{a}|^2(\vec{b},\vec{c})$, та знайти вектор $\vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$. [3]

14. З однієї точки відкладені три вектори $\vec{a} = (0,-3,4)$, $\vec{b} = (4,1,-8)$ та $\vec{c}$, причому вектор $\vec{c}$ має довжину 1 та ділить кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$ пополам. Обчислити координати вектора $\vec{c}$. [4]

15. Знайти суму ортогональних проекцій вектора $\vec{a}$ на сторони правильного трикутника. [5]

16. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти кути трикутника. [5]

17. Дано плоскі кути α, β та γ тригранного кута. Знайти його двогранні кути. [5]

18. Дві трійки векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ та $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ називаються взаємними, якщо $(\vec{a}_i, \vec{b}_j) = \delta_{ij}$. Для трійки векторів $\vec{a}_1 = (3,0,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,1,2)$, $\vec{a}_3 = (1,2,1)$ знайти взаємну трійку. [5]

19. Довести, що площа трикутника, утвореного медіанами трикутника ABC, дорівнює $3/4$ площі трикутника ABC. [5]

20. В просторі дано дві прямокутні системи координат $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ та $0', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$. Початок другої системи координат має в першій наступні координати $-1, 3, 5$. Вектор $\vec{e}\,'_1$ утворює кути 60^0 з векторами $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, та гострий кут з вектором $\vec{e}_3$. Вектор $\vec{e}\,'_2$ комланарний з векторами $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, та утворює гострий кут з вектором $\vec{e}_2$. Трійки $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ та $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ однаково орієнтовані. Знайти координати точки простору в першій СК, якщо відомі її координати в другій СК. [5]

21. Дано дві точки $A(3;-4;-2)$ та $B(2;5;-1)$. Знайти вектор $\overrightarrow{AB}$, а потім проекцію цього вектора на вісь, яка утворює з осями OX та OY кути $\alpha = 60^0$ та $\beta = 150^0$, а з віссю OZ — тупий кут γ. [2]

22. Нехай $\vec{x}$ - довільний вектор, $\vec{a}$, $\vec{n}$ - фіксовані ненульові вектори геометричного векторного простору (двовимірного або тривимірного). Перевірити лінійність перетворень φ, заданого наступними формулами, та вияснити їх геометричний смисл:

а) $\varphi(\vec{x}) = (\vec{x},\vec{a})\,\vec{a}\,/\,|\,\vec{a}\,|^2$; [5]

б) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{x},\vec{n})\,\vec{n}\,/\,|\,\vec{n}\,|^2$; [5]

в) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{x},\vec{n})\,\vec{a}\,/\,(\vec{a},\vec{n})$, $(\vec{a},\vec{n}) \neq 0$. [5]

23. Перевірити лінійність та виявити геометричний зміст перетворень $\varphi(\vec{x}) = [\vec{x},\vec{a}]$ та $\varphi(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x},\vec{v}) - \vec{v}(\vec{x},\vec{u})$ тривимірного геометричного векторного простору, де $\vec{a},\vec{u},\vec{v}$ — фіксовані вектори, для яких $|\vec{a}| = 1$ та $[\vec{u},\vec{v}] \neq 0$. [5]

24. Довести наступну формулу розкладу векторного добутку векторів по неортонормованому базису $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$:

$$[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}] = \frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} . \quad [4]$$

25. Знайти розв'язок векторного рівняння $\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}$. [3]

26. Записати параметричне рівняння прямої, утвореної при перетині площин $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1) = d_1$ та $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2) = d_2$, де $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 \neq 0$. [3]

§2. Аналітична геометрія

27. Записати рівняння площини, яка є перпендикулярною до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$ та проходить через дві задані точки $M_1(1;-1;-2)$ та $M_2(3;1;1)$. [2]

28. Дано три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ та $M_3(4;-5;-2)$. Перевірити, що вони не лежать на одній прямій, та знайти рівняння площини, яка проходить через ці три точки. Знайти відстань від точки $P(-1;1;-2)$ до цієї площини. [2]

29. Визначити косинус кута між такими прямими:

а) $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ [2] б) $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$ [2]

30. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1;2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\boldsymbol{a}=(6;-2;-2)$ та перетинає пряму

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}\,. \quad [3]$$

31. Скласти параметричне рівняння спільного перпендикуляра двох прямих, які задано рівняннями $x=3t-7$, $y=-2t+4$, $z=3t+4$ та $x=t+1$, $y=2t-8$, $z=-t-12$. [2]

32. З точки $P(6;-8)$ проведено всі можливі промені до перетину з віссю абсцис. Знайти рівняння геометричного місця їхніх середин. [4]

33. Дано рівняння кола $x^2+y^2=25$. Скласти рівняння геометричного місця середин тих хорд цього кола, довжина яких дорівнює 8. [4]

34. Знайти рівняння кола з центром на прямій $2x+y=0$ та дотичного до паралельних прямих $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$. [4]

35. Знайти рівняння кола з центром в точці $A(-1;5)$ та дотичного до непаралельних прямих $3x+4y-35=0$, $4x+3y+14=0$. [5]

36. Знайти рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=5$ в точці $A(1;2)$. [1]

37. З точки $A(5/3,-5/3)$ проведено дотичні до кола $x^2+y^2=5$. Отримати їхні рівняння. [2]

38. Знайти рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротші відстані до двох заданих кіл $(x+3)^2+y^2=1$ та $(x-3)^2+y^2=81$ рівні між собою. [5]

39. Знайти рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротші відстані до даного кола $(x-5)^2+y^2=9$ та до даної прямої $x+2=0$ рівні між собою. [4]

40. Знайти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані до даної точки $F(-5;0)$ до відстані до даної прямої $5x+16=0$ дорівнює $5/4$. [4]

41. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) його півосі дорівнюють 5 та 2; [2]

б) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами 10; [2]

в) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$. [2]

42. Знайти рівняння параболи, якщо задано її фокус $F(4;3)$ та рівняння директриси $y+1=0$. [2]

43. Знайти рівняння параболи, якщо задано її вершину $A(-2;-1)$ та рівняння її директриси $x+2y-1=0$. [2]

44. Знайти точки гіперболи $x^2/9 - y^2/16 = 1$, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 7. [3]

45. Довести, що площа паралелограма, обмеженого асимптотами гіперболи $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ та прямими, проведеними через довільну її точку паралельно асимптотам, є сталою та дорівнює $ab/2$. [4]

46. З правого фокуса гіперболи $x^2/5 - y^2/4 = 1$ під кутом α до осі Ox (де $\pi < \alpha < 3\pi/2$ та $\operatorname{tg}\alpha = 2$) направлено промінь світла. Дійшовши до гіперболи, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь. [4]

47. Які з наступних ліній є центральними (тобто мають єдиний центр), які не мають центра, а які мають нескінченно багато центрів:

а) $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12y - 7 = 0$; [1]

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$; [1]

в) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$; [1]

г) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$. [1]

48. Встановити, що наступні лінії є центральними, та для кожної з них знайти координати центра:

а) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$; [1]

б) $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$. [1]

49. За яких значень m та n рівняння $mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 13 = 0$ визначає: а) центральну лінію; б) лінію без центра; в) лінію, яка має нескінченно багато центрів. [3]

50. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду, визначити його тип та встановити, який геометричний образ воно визначає:

а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$; [3]

б) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$; [3]

в) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$. [3]

51. Без проведення перетворення координат встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає еліпс, та знайти величини його півосей:

а) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$; [3]

б) $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$. [3]

52. Без проведення перетворення координат встановити, що рівняння $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$ визначає єдину точку (вироджений еліпс), та знайти її координати. [3]

53. Встановити, що рівняння $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$ є параболічним, звести його до найпростішого виду та встановити, який геометричний образ воно визначає. [3]

54. Дано рівняння еліпса $x^2/25 + y^2/16 = 1$. Знайти його полярне рівняння, якщо напрямок полярної осі збігається з додатнім напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться в лівому фокусі еліпса. [3]

55. Дано рівняння гіперболи $x^2/16 - y^2/9 = 1$. Знайти полярне рівняння її правої гілки, якщо напрямок полярної осі збігається з додатним напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи. [2]

56. Дано рівняння параболи $y^2 = 6x$. Знайти її полярне рівняння, якщо напрямок полярної осі збігається з додатнім напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи. [2]

57. Визначити, які лінії описують наступні рівняння в полярних координатах:

а) $\rho = \dfrac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$ [2] б) $\rho = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\theta}$ [2] в) $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\theta}$ [2]

58. Встановити, що рівняння $\rho = 144/(13 - 5\cos\theta)$ визначає еліпс та знайти його півосі. [2]

59. Встановити, що рівняння $\rho = 16/(3 - 5\cos\theta)$ визначає праву гілку гіперболи, та скласти полярні рівняння директрис та асимптот цієї гіперболи. [2]

60. Скласти рівняння діаметра еліпса $x^2/25 + y^2/16 = 1$, який проходить через середину його хорди з рівнянням $2x - y = 3$. [2]

61. Скласти рівняння діаметра параболи $y^2 = 12x$, який проходить через середину його хорди з рівнянням $3x + y = 5$. [2]

62. Знайти рівняння взаємно спряжених діаметрів еліпса $x^2 + 3y^2 = 1$, з яких один ортогональний до прямої $3x + 2y = 7$. [3]

63. Скласти рівняння спряжених діаметрів гіперболи $x^2 - 4y^2 = 4$, з яких один проходить через точку $A(8;1)$. [4]

64. Дано параболу $y^2 = 20x$. Скласти рівняння її хорди, яка проходить через точку $A(2;5)$ та ділиться точкою A навпіл. [3]

65. Визначити, при якому значенні m площина $x - 2y - 2z + m = 0$ дотикається еліпсоїда $x^2/144 + y^2/36 + z^2/9 = 1$. [3]

66. Довести, що еліпсоїд $x^2/81 + y^2/36 + z^2/9 = 1$ має з площиною $4x - 3y + 12z = 54$ одну спільну точку, та знайти її координати. [3]

67. Довести, що гіперболоїд $x^2/3 + y^2/4 - z^2/25 = -1$ має з площиною $5x + 2z = -5$ одну спільну точку, та знайти її координати. [3]

68. Скласти рівняння прямолінійних твірних однополого гіперболоїда $x^2/4 + y^2/9 - z^2/16 = 1$, паралельних площині $6x + 4y + 3z = 17$. [5]

69. Скласти рівняння площини, яка ортогональна до вектора $\mathbf{n} = (2;-1;-2)$ та дотикається параболоїда $x^2/3 + y^2/4 = 2z$. [3]

70. Довести, що площина $2x - 12y - z + 16 = 0$ перетинає гіперболічний параболоїд $x^2 - 4y^2 = 2z$ уздовж прямолінійних твірних, та скласти рівняння цих твірних. [3]

71. Знайти координати точки A, яка лежить на прямій $x + y = 8$ та є рівновіддаленою від точки $B(2,8)$ та прямої $x - 3y + 2 = 0$. [3]

72. Знайти множину точок площини, для яких відношення відстаней до прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, які перетинаються, є постійною величиною $k > 0$. [4]

73. Знайти рівняння прямої, симетричної до прямої $3x - y + 5 = 0$ відносно прямої $x + y - 1 = 0$. [4]

74. Нехай $x + 2y = -1$, $2x - y = 2$ та $2x + y = -2$ є рівняннями сторін трикутника. Знайти рівняння висоти, опущеної на третю сторону. [3]

75. Нехай точка $A(2,0)$ є вершиною правильного трикутника, а протилежна до неї сторона лежить на прямій $x + y - 1 = 0$. Знайти рівняння двох інших сторін цього трикутника. [3]

76. Знайти відстань:

а) від точки $M_0(\vec{r}_0)$ до площини $(\vec{r},\vec{n}) = D$; [2]

б) між двома паралельними площинами $\vec{r} = \vec{r}_1 + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$ та $\vec{r} = \vec{r}_2 + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$; [2]

в) між паралельними площинами $(\vec{r},\vec{n}) = D_1$ та $(\vec{r},\vec{n}) = D_2$; [2]

г) від точки $M_0(\vec{r}_0)$ до прямої $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$; [3]

д) від точки $M_0(\vec{r}_0)$ до прямої $[\vec{r},\vec{a}] = \vec{b}$; [3]

е) між паралельними прямими $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$ та $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}t$; [2]

є) між паралельними прямими $[\vec{r},\vec{a}] = \vec{b}_1$ та $[\vec{r},\vec{a}] = \vec{b}_2$; [2]

ж) між мимобіжними прямими $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ та $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$; [4]

з) між мимобіжними прямими $[\vec{r},\vec{a}_1] = \vec{b}_1$ та $[\vec{r},\vec{a}_2] = \vec{b}_2$. [4]

77. В пучці, який визначається площинами $x + 2y - 3z + 5 = 0$ та $4x - y + 3z + 5 = 0$, знайти дві перпендикулярні одна до одної площини, одна з яких проходить через точку $M(1, 3, 1)$. [3]

78. Знайти координати точки A, яка є рівновіддаленою від точок $B(3, 0, -2)$ та $C(-1, 1, 5)$ та лежить на прямій

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}\ . \quad [2]$$

79. Знайти координати точки A, розташованої на відстані $\sqrt{3}$ від площини $x + y + z + 3 = 0$, яка належить прямій

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}\ . \quad [3]$$

80. Знайти рівняння прямої, яка є симетричною відносно площини $5x - y + z - 4 = 0$ прямій

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}\ . \quad [2]$$

81. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму

$$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

та утворює кут 45^0 з площиною $x - 4y - 8z + 1 = 0$. [2]

82. Знайти координати точки A, яка лежить на прямій

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

та відстань від якої до прямої $x = y = z$ дорівнює $\sqrt{6}$. [3]

83. Вершинами тетраедра є точки $A(1,2,3)$, $B(-2,8,9)$, $C(5,0,7)$ та $D(3,4,2)$. Знайти для нього радіуси та координати центрів вписаної та описаної сфер. [4]

84. Перевірити, що два даних кола дотикаються, та знайти рівняння тієї спільної дотичної, яка проходить через точку дотику:

а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 18$ та $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 2$; [2]

б) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 45$ та $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 5$. [2]

85. Зобразити множини точок, які задано нерівностями:

1) $-1 \le x^2 + y^2 - 2x + 2y \le 7$; [1]

2) $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < 6$; [2]

3) $|3x^2 - 9y^2| > 1$; [2]

4) $y^2 \le 4x$; [2]

5) $-2x - x^2 < y^2 < -2x$. [2]

86. Зобразити множини точок, які в полярних координатах задаються рівняннями:

1) $r = 1$; [1] 2) $r = \dfrac{1}{1 - 2\cos\varphi}$; [1]

3) $r = \dfrac{1}{\sin^2(\varphi/2)}$; [1] 4) $r = \dfrac{3}{2 - \cos\varphi}$. [1]

87. Знайти рівняння сторін квадрата, вписаного в еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Яку частину площі еліпса складає площа цього квадрата? [4]

88. Знайти рівняння геометричного місця точок, які є серединами хорд еліпса $x^2/25 + y^2/9 = 1$, паралельних прямій $x + 2y = 1$. [3]

89. Виразити ексцентриситет гіперболи через ексцентриситет ε еліпса, який має з цією гіперболою загальні фокальні хорди. [5]

90. Довести, що вершини гіперболи та чотири точки перетину її директрис з асимптотами лежать на одному колі. Виразити радіус цього кола через довжину дійсної півосі. [4]

91. Знайти множину значень, які може мати відношення відстаней від точки параболи до її вершини та від цієї ж точки до фокуса. [5]

92. Знайти радіус найбільшого кола, яке лежить всередині параболи $y^2 = 2px$ та дотикається до цієї параболи у її вершині. [5]

93. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2 = 10x$, перпендикулярних відповідно до прямих $2x + y = 4$, $y = 3$ та $x = 0$. [4]

94. Скласти рівняння гіперболи з асимптотами $\sqrt{3}x \pm y = 0$, яка дотикається до прямої $2x - y - 3 = 0$. [4]

95. Перевірити, що на площині OXY рівняння $x^2+y^2-4x+3 = 0$ описує коло та знайти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні цього кола навколо осі OY. [3]

96. Знайти рівняння поверхонь, які утворюються при обертанні гіперболи $xy = 1$ навколо її асимптот. [2]

97. Знайти лінії перетину площини $x + y + z = 1$ та параболоїда $x^2 - y^2 = 2z$. [2]

98. Знайти рівняння проекцій на координатні площини лінії перетину поверхонь $5x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 0$ та $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$. [3]

В наступних задачах параграфу декартова система координат не обов'язково прямокутна.

99. Вказати хоча б один направляючий вектор прямої, яка:

а) має кутовий коефіцієнт k; [1]

б) задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$. [1]

100. Записати рівняння прямої $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$ у вигляді $Ax + By + C = 0$ та знайти її кутовий коефіцієнт. [1]

101. Записати рівняння прямої $3x - 4y + 4 = 0$ в параметричній та канонічній формах. [1]

102. Дано дві вершини трикутника $(3,-1)$ та $(1,4)$ та точка перетину його медіан $(0,2)$. Знайти координати третьої вершини трикутника та знайти рівняння його сторін. [3]

103. Через вершину C паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторін AB та AD відповідно у точках K та L таких, що $|AK|/|AB| = 5|AL|/|AD|$. Знайти відношення площі паралелограма до площі трикутника AKL. [3]

104. В загальній декартовій системі координат гіперболоїд має рівняння $(x+y+z)(x-y+z)-2(2x-y+2z)^2=0$. Знайти рівняння його асимптотичного конуса. [4]

§3. Лінійна алгебра

105. Знайти лінійний оператор A (матрицю), що переводить вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $\boldsymbol{a}' = A\boldsymbol{a}$, якщо:

а) $\boldsymbol{a}'$ є дзеркальним відображенням вектора $\boldsymbol{a}$ в площині з одиничним вектором нормалі $\boldsymbol{n}$; [2]

б) $\boldsymbol{a}'$ є результатом повороту вектора $\boldsymbol{a}$ на кут θ навколо осі $\boldsymbol{n}$; [2]

в) вектор $\boldsymbol{a}'$ є результатом повороту вектора $\boldsymbol{a}$ на кут θ навколо вісі $\boldsymbol{n}$ з наступним відбиванням в площині з вектором нормалі $\boldsymbol{n}$ (дзеркальний поворот) . [3]

Як по вигляду ортогональної матриці A встановити, яке відображення (поворот чи дзеркальний поворот) вона здійснює? [3]

106. Які власні значення та власні вектори мають матриці повороту та відбиття? [3]

107. Нехай $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$. Обчислити якобіан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} \quad [2]$$

108. Нехай в матриці A порядку n точно n елементів дорівнюють 1, а решта — нулі. Чому може дорівнювати визначник цієї матриці? [3]

109. Як зміниться визначник, якщо всі елементи відповідної матриці замінити комплексно спряженими числами? [1]

110. Обчислити визначники $n-$го порядку (для цього корисно отримати відповідні рекурентні формули):

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\alpha \end{vmatrix} ; \quad [2]$$

$$\text{б)}\ \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix} . \quad [2]$$

111. Показати, що визначник матриці n-го порядку дорівнює нулю, якщо в ній є нульова підматриця розмірів $k \times l$, причому $k+l > n$. [3]

112. Числа 1081, 1403, 2093 та 1541 діляться на 23. Поясніть без обчислення, чому число

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

також ділиться на 23. [3]

113. Довести, що $\det(A - \lambda E)$ є многочленом від λ, та обчислити його коефіцієнти. [3]

114. Довести, що для будь-якої дійсної матриці $\det AA^T \geq 0$. [2]

115. Обчислити наступні визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^n [2] ; \quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^n [2] ; \quad 3)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^3 [2] .$$

116. На яку матрицю необхідно помножити матрицю, щоб в результаті отримати: а) її перший стовпчик; б) її перший рядок? [2]

117. Нехай A — вироджена матриця другого порядку. Довести, що існує таке число λ, що $A^n = \lambda^{n-1}A$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. [3]

118. *Обчислити наступні величини:*

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} [1] \ ; \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \lambda_1 \\ \cdots & \iddots & \cdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 \end{vmatrix}^{-1} [3] \ .$$

119. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}^{-1} \quad [3] \ .$$

120. Нехай $A^2 + A + E = 0$. Довести, що матриця A невироджена та вказати найпростіший спосіб обчислення матриці A^{-1}. [3]

121. Нехай $A^m = 0$. Довести, що $(E - A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{m-1}$. [3]

122. Нехай матриці A та C невироджені. Розв'язати матричні рівняння $AX = 0$ [1], $XA = B$ [1], $AXC = B$ [1] та $A(X + C) = B$. [1]

123. Знайти загальний вигляд матриць другого порядку таких типів: а) ермітових; [2] б) косоермітових; [2] в) матриць перестановок. [2]

124. Довести, що дійсна унітарна матриця ортогональна. [1]

125. Довести, що добуток AB двох ортогональних матриць A та B також є ортогональною матрицею. [2]

126. Довести, що матрична рівність $AB - BA = E$ неможлива. [3]

127. Обчислити визначник Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad [3]$$

128. Вказати який-небудь базисний мінор та визначити ранг матриці:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\ ;\ \ [1] \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .\ \ [2]$$

129. Довести, що якщо стовпчики матриці B є лінійними комбінаціями стовпчиків матриці A, то $\operatorname{rang} B \le \operatorname{rang} A$. [2]

130. Оцінити ранг добутку AB двох матриць через ранги множників A та B. Навести приклади, коли $\operatorname{rang} AB < \operatorname{rang} A$, $\operatorname{rang} AB < \operatorname{rang} B$, $\operatorname{rang} AB < \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$, $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$, $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} B$.[3]

131. Довести, що будь-яку матрицю рангу r можна представити у вигляді суми r матриць рангу 1. [2]

132. Нехай матриці A та B мають розмір відповідно $m \times r$ та $r \times n$, причому $\operatorname{rang} AB = r$. Знайти ранги матриць A та B. [3]

133. Нехай матриці A та B мають розмір відповідно $m \times n$ та $n \times p$, причому $AB = 0$. Довести, що $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \le n$. [3]

134. Виписати розширену матрицю даної системи рівнянь. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \ 3 \\ x_1 + x_3 = \ 4 \\ x_1 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_5 = -1 \\ x_1 + x_6 = \ 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1\ . \end{cases} \qquad [3]$$

135. Виписати матрицю коефіцієнтів даної системи лінійних однорідних рівнянь. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 0\ . \end{cases} \qquad [3]$$

136. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 11x_5 &= 20 \\ 13x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 + 6x_5 &= 11 \\ 4x_1 + 7x_2 + 46x_3 - 12x_4 - 7x_5 &= -12 \\ x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 7\,. \end{cases} \quad [3]$$

137. Сформулювати необхідну та достатню умову того, що система m лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок. [2]

138. Довести, що якщо стовпчики основної матриці лінійно незалежні, то система лінійних рівнянь має не більше одного розв'язку. [2]

139. Довести, що якщо рядки основної матриці лінійно незалежні, то система рівнянь сумісна за будь-якого стовпчика вільних членів. [2]

140. Сформулювати та довести умову в термінах рангів на декартові координати (a_1, b_1), (a_2, b_2) та (a_3, b_3) трьох точок площини, необхідну та достатню для того, щоб ці точки не лежали на одній прямій. Розв'язати це питання для чотирьох точок площини. [3]

141. Чи є лінійним простором порожня множина? Чи може лінійний простір складається з одного нульового елемента? [1]

142. Розглянемо лінійні підпростори простору всіх поліномів, породжені відповідно множинами поліномів $\{1+2t+t^3, 1+t+t^2, t-t^2+t^3\}$ та $\{1+t^2, 1+3t+t^3, 3t-t^2+t^3\}$. Знайти розмірність та базис суми й перетину цих лінійних підпросторів. [2]

143. Довести, що множину всіх поліномів степеня не вище n з комплексними коефіцієнтами можна розглядати і як комплексний лінійний простір, і як дійсний лінійний простір. В обох випадках знайти базис та розмірність відповідного простору, а також розклад в знайденому базисі полінома $1 - 2i + (3+i)t - 3t^2$. [3]

144. В лінійному просторі дійсних поліномів $p(x, y)$ від двох змінних розглянемо перетворення $\varphi(p(x, y)) = p(x+a, y+b)$, де a та b — фіксовані числа. Показати, що це перетворення φ є лінійним, що лінійний підпростір P_2 всіх поліномів степеня $n \le 2$ є інваріантним для φ, та знайти його матрицю на підпросторі P_2 в базисі $1, x, y, x^2, xy, y^2$. [3]

145. Розглянемо лінійний простір P_m поліномів степеня $n \le m$ та оператор диференціювання D. Перевірити, що система поліномів $1+t$,

$t+2t^2$ та $3t^2-1$ є базисом в просторі P_2, та обчислити матрицю оператора $D: P_2 \to P_2$ в цьому базисі. Розглянути аналогічну задачу для системи $\{\, t^3+1, 1-t, 1-t+t^2, 1-t+t^2-t^3 \,\}$ в просторі P_3. [2]

146. Знайти власні значення та власні вектори оператора Лапласа в лінійному просторі всіх поліномів $p(x,y)$ від двох змінних з дійсними коефіцієнтами. [3]

147. Нехай в лінійному просторі задано дві операції скалярного множення $(x,y)_1$ та $(x,y)_2$. Довести, що для довільних $\lambda \geq 0$ та $\mu \geq 0$, які одночасно не дорівнюють нулю, операція $(x,y) = \lambda(x,y)_1 + \mu(x,y)_2$ також буде скалярним множенням. [1]

148. Чи в будь-якому лінійному просторі скінченної розмірності можна ввести операцію скалярного множення? [2]

149. Нехай $C_{m\times n}$ є комплексним лінійним простором матриць розміру $m \times n$ з комплексними елементами. Перевірити, які з наступних функцій є унітарним скалярним добутком: $F_1(X,Y) = \operatorname{tr} XY^T$, [1] $F_2(X,Y) = \operatorname{tr} X\bar{Y}^T$ [2] та $F_3(X,Y) = \operatorname{tr} \bar{X}Y^T$. [3]

150. Фіксуємо дійсні числа $t_1 < \ldots < t_m$. Довести, що в лінійному просторі поліномів з дійсними коефіцієнтами степеня не вище n при $n < m$ функція $(f,g) = \sum_1^m f(t_k)g(t_k)$ є скалярним добутком. Чи буде ця функція евклідовим скалярним добутком, якщо $m \leq n$? [3]

151. Нехай вектори x та y евклідового або унітарного простору задані в базисі $e_1, ..., e_n$ координатними стовпчиками відповідно ξ та η. Нехай для базису $f_1, ..., f_n$ відома матриця Грама Γ_f. Обчислити матрицю Грама Γ_e базису $e_1, ..., e_n$ та скалярний добуток $x \cdot y$, якщо:

а) $f_1 = e_1 - e_2,\ f_2 = e_1 - 2e_2,\ \Gamma_f = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ [2]

б) $f_1 = e_1 - e_2,\ f_2 = e_1 + e_2,\ \Gamma_f = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. [2]

152. Довести наступні нерівності:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right), \quad [2]$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right)^{1/2}, \quad [2]$$

де $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — довільні дійсні або комплексні числа. В яких випадках в цих нерівностях досягається рівність? [5]

153. Застосувати процес ортогоналізації та нормування до наступних лінійно незалежних систем векторів 3-вимірного дійсного евклідового лінійного простору:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -4)$; [2]

б) $\vec{a}_1 = (2, 1, -2)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, 0)$. [2]

154. В певному ортонормованому базисі 4-вимірного евклідового простору два вектори задано їх координатами. Перевірити ортогональність заданих векторів та доповнити цей набір до ортогонального базису:

а) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 1, -1)$; [2]

б) $\vec{a}_1 = (1, -1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 1, 3)$. [2]

155. Перевірити, що тригонометрична система функцій

$$1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$$

ортогональна відносно скалярного добутку $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$. Нормувати цю систему. [2]

156. Нехай A — матриця лінійного оператора евклідового простору в деякому базисі, Γ — матриця Грама цього базису. Знайти матрицю A^* спряженого оператора в тому ж базисі, якщо:

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \ ; \quad [2]$$

$$2)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ . \quad [2]$$

157. Розглянемо лінійний простір P_2 поліномів степеня $n \leq 2$ на відрізку $[-1, 1]$ з скалярним добутком

$$(p, q) = \int_{-1}^{+1} p(t)q(t)\,dt$$

та оператор диференціювання D на цьому просторі. Знайти матрицю спряженого перетворення D^* в базисах $\{1, t, t^2\}$ та $\{1, t, 3t^2 - 1\}$. [3]

158. Нехай лінійний оператор φ евклідового або унітарного простору має в деякому базисі матрицю A, а матриця Грама цього базису дорівнює Γ. Визначити, чи є φ самоспряженим, якщо:

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}; \quad [2]$$

$$2)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad [2]$$

159. Чи може самоспряжений оператор мати неортогональний базис із власних векторів? [2]

160. Знайти власні значення та ортонормований базис із власних векторів самоспряженого перетворення φ, заданого в деякому ортонормованому базисі такою матрицею:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{bmatrix}, \quad [2] \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad [2]$$

161. Чи є ортогональним лінійний оператор φ двовимірного простору, який діє на вектори ортонормованого базису e_1, e_2 за формулами $\varphi(e_1) = (3e_1+4e_2)/5$ та $\varphi(e_2) = (4e_1+3e_2)/5$. [2] Розглянути аналогічне питання для оператора в тривимірному просторі, який діє на вектори ортонормованого базису e_1, e_2, e_3 за формулами $\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$ та $\varphi(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + e_3$. [2]

162. Лінійний оператор евклідового (унітарного) простору є одночасно ортогональним (унітарним) та самоспряженим. Пояснити геометричний зміст такого оператора. [2]

163. Чи може для лінійної функції $f(x)$, заданої на n-вимірному лінійному просторі L_n, при всіх $x \in L_n$ виконуватись нерівність $f(x) > 0$? А нерівність $f(x) \geq 0$? А рівність $f(x) = \alpha$? [3]

164. Функція $\operatorname{tr} X$ ставить у відповідність квадратній матриці X порядку n її слід. Перевірити, що ця функція є лінійною та знайти її координатний рядок (координатну матрицю) в стандартному базисі простору матриць. [2]

165. Побудувати матрицю білінійної форми $2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2$ та записати відповідну їй квадратичну форму в двомірному просторі. Розв'язати аналогічну задачу для білінійної форми

$$x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3$$

в тривимірному просторі. [3]

166. За заданою квадратичною формою $-18x_1x_2 + 9x_2^2$ відновити відповідну симетричну білінійну форму в двомірному лінійному просторі та побудувати матрицю останньої. Розв'язати аналогічну задачу для білінійної форми $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$ в $\mathbb{R}^3$. [4]

167. Нехай дано квадратичну форму $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ в базисі e_1, e_2, e_3. Записати цю квадратичну функцію в базисі e_1', e_2', e_3', якщо $e_1' = 2e_1 - e_3$, $e_2' = -e_1 + 2e_2 - e_3$ та $e_3' = -e_2 + e_3$. [3]

168. Звести білінійну форму $13x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_2y_2$ до канонічного вигляду. [2]

169. Довести, що несиметричну білінійну функцію не можна звести до діагонального вигляду. [4]

170. Звести квадратичну форму $8x_1^2 + \lambda x_1x_2 + 2x_2^2$ до канонічного вигляду при всіх можливих значеннях дійсного параметра λ. [2]

171. При яких значеннях параметра λ квадратична форма $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ додатньо визначена, від'ємно визначена або напіввизначена? [2]

172. Довести, що в лінійному просторі дійсних матриць n-го порядку квадратична форма $k(X) = \mathrm{tr}(XX^T)$ є додатньо визначеною. [2]

173. Нехай квадратична (білінійна) функція в певному ортонормованому базисі відповідного евклідового простору має вид $-x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$. Знайти ортонормований базис, в якому дана функція має діагональний вигляд та записати цей діагональний вигляд. [2] Розв'язати аналогічну задачу для форми $3x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_3x_4 - 4x_4^2$. [2]

174. Перевірити, що хоча б одна з квадратичних форм $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ та $4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$ є знаковизначеною. Знайти заміну координат, яка приводить ці дві форми одночасно до діагонального вигляду та записати цей діагональний вигляд обох форм. [3]

175. Знайти кут між діагоналлю та ребром n-вимірного куба. [4]

176. Знайти відношення довжини ортогональної проекції довільного ребра n-вимірного куба на його діагональ до довжини діагоналі. [5]

177. Знайти кут між прямими l_1 та l_2 в просторі відповідної розмірності, якщо:

$$1)\quad \begin{aligned} l_1:&\quad x_1 = 4 + t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = 1 - t,\ x_4 = 2 \\ l_2:&\quad x_1 = 3,\ x_2 = t,\ x_3 = 5 + t,\ x_4 = -1\ ;\quad [1] \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} l_1:&\quad x_1 = 1 + t,\ x_2 = 2 + t,\ x_3 = 3 + t,\ x_4 = 2t,\ x_5 = 1 - t \\ l_2:&\quad x_1 = t,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1 + t,\ x_4 = 3 - 2t,\ x_5 = 2t\ .\quad [1] \end{aligned}$$

178. Обчислити в евклідовому просторі відповідної розмірності відстань від точки A до заданої параметрично двовимірної площини m:

1) $A = (3, 1, 1, 0)$

$m:\ x_1 = -2 + t_1,\ x_2 = -t_1 + 2t_2,\ x_3 = t_1 - t_2,\ x_4 = 1 - t_1 - t_2$; [2]

2) $A = (1, 2, 1, 3, 0)$

$m:\ x_1 = 1 + t_1,\ x_2 = -t_1 + t_2,\ x_3 = 1 + t_2,\ x_4 = -1 - t_2,\ x_5 = t_1$. [2]

179. Обчислити в чотиривимірному евклідовому просторі відстань між прямою l та двовимірною площиною m, де пряму l задано рівняннями $x_1 = 2 - 2t$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 0$, а площину m — рівняннями $x_1 = 1 - 2t_1$, $x_2 = 1 + 2t_1 + 3t_2$, $x_3 = 1 + t_1$, $x_4 = 1 + 2t_1 + 2t_2$. [3]

180. Обчислити методом рекурентних співвідношень такий визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix} \quad [3]$$

181. Обчислити методом рекурентних співвідношень такий визначник:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} \quad [3]$$

182. Обчислити визначник представленням його у вигляді суми:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n \end{vmatrix} \quad [3]$$

183. Обчислити такі визначники:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} \quad [3] \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad [3]$$

184. Обчислити такий визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad [3]$$

185. Обчислити такий визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \ddots & (n+1)^n \end{vmatrix} \quad [3]$$

186. Обчислити такий визначник:

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \dots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \dots & \sin n\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \dots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix} \quad [3]$$

187. Обчислити такий визначник:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix} \qquad [3]$$

188. Обчислити такий визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad [3]$$

189. Обчислити визначник, попередньо перетворивши його за теоремою Лапласа:

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & \dots & x & x & \dots & x & 1+x \\ x & 1+x & \dots & x & x & \dots & 1+x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & 1+x & 1+x & \dots & x & x \\ x & x & \dots & 1+2x & 1+x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & 1+2x & \dots & x & x & \dots & 1+x & x \\ 1+2x & x & \dots & x & x & \dots & x & 1+x \end{vmatrix} \qquad [3]$$

190. Знайти обернену матрицю для

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad [3]$$

191. Знайти обернену матрицю для

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad [3]$$

§4. Геометрія n-вимірного простору та тензорна алгебра

192. Знайти множину точок $\boldsymbol{r}$, що задовольняє рівнянню $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}-2\boldsymbol{a})=0$, якщо $\boldsymbol{r}$ та $\boldsymbol{a}$: а) вектори на площині; б) вектори в $\mathbb{R}^n$. [5]

193. Що побачить спостерігач в чотиривимірному просторі, розглядаючи деяке тіло в $\mathbb{R}^3$? Покажіть, що спостерігач в $\mathbb{R}^4$ зможе побачити кісточку в сливі не розрізаючи її, оскільки світлові промені в $\mathbb{R}^4$ поширюються вздовж прямих від точки випромінювання до найближчої точки, яка стоїть на шляху променя. [5]

194. Знайти кут між головною діагоналлю n-вимірного куба та суміжним ребром. Знайти спосіб побудови точної проекції чотиривимірного куба в $\mathbb{R}^3$ з дотриманням всіх масштабів та кутів. [5]

195. Яку частку від об'єму чотиривимірного куба складає вписана в нього куля? А від десятивимірного? [5]

196. Які многогранники можна отримати в перетині чотиривимірного куба з гіперплощиною? Скільки граней можуть мати ці многогранники? Скільки ребер може мати кожна з граней? Скільки ребер може виходити з однієї вершини многогранника? Для прикладу розгляньте многогранники, що утворюються при перетині чотиривимірного куба $|x_i| \le 1$, $i=\overline{1,4}$ з гіперплощиною $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})=0$, якщо: а) $\boldsymbol{n}=(1,1,1,1)$, б) $\boldsymbol{n}=(1,1,1,0)$, в) $\boldsymbol{n}=(2,2,3,1)$. [5]

197. Два зчеплені кільця в тривимірному просторі не можна рознести на нескінченність не розриваючи одного з них. Довести, що в чотиривимірному просторі зчеплені кільця можна роз'єднати (тобто рознести на нескінченність) без розриву і перетину кілець. Виходячи з цього, наведіть аргументи на користь того, що такі топологічні об'єкти як вузли існують тільки в тривимірному просторі (інакше кажучи, будь-який вузел в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$ еквівалентний колу). [5]

198. В тривимірному просторі двом довільним неколінеарним векторам $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ можна співставити третій вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. В просторах з іншою розмірністю операції векторного добутку не існує. Який об'єкт можна вважати узагальненням векторного добутку в просторах $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$? Як узагальнюється означення ротора векторного поля для довільного простору $\mathbb{R}^n$? [5]

199. Нехай $b(x, y)$ — білінійна функція, а $B = (b_{ij})$ — її матриця в певному базисі n-вимірного простору L_n. За коефіцієнтами цієї матриці розглянемо величини $\det B$, $\operatorname{tr} B = b_{11} + \ldots + b_{nn}$, b_{11}, $\det BB^T$, $\operatorname{rang} B$ та $\operatorname{sign}(\det B)$. Як змінюється кожна з цих величин при заміні базису? Яка з цих величин визначає тензор? Яка є інваріантом? [4]

200. Кожному базису простору L_n $(n > k \geq 1)$ співставлено числа

$$\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (i_1, ..., i_k) - \text{парна перестановка} \\ & \text{попарно різних чисел } j_1, ..., j_k; \\ -1, & \text{якщо } (i_1, ..., i_k) - \text{непарна перестановка} \\ & \text{попарно різних чисел } j_1, ..., j_k; \end{cases}$$

Чи буде така відповідність тензором? [3]

201. Нехай тензор типу $(0, n)$ має в деякому базисі компоненти

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} (-1)^{N(i_1, \ldots, i_n)}, & \text{якщо всі числа } i_1, \ldots, i_n \text{ різні} \\ 0\,, & \text{якщо серед чисел } i_1, \ldots, i_n \text{ є однакові}\,, \end{cases}$$

де $N(i_1, \ldots, i_n)$ — кількість порушень порядку перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$. Обчислити компоненти даного тензора в базисі $\vec{e}\,' = \vec{e} S$. Якщо кожному базису простору L_n співставлено числа $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$, то чи буде ця відповідність тензором типу $(0, n)$? [4]

202. Нехай в чотиривимірному просторі задано тривалентний тензор. Скільки компонент він має? Скільки доданків входить в вираз нової компоненти через стару при запису закону перетворення компонент? Скільки множників буде в кожному доданку? [5]

203. Записати в матричній формі закон перетворення компонент тензорів типу $(0, 2)$, $(1, 1)$ та $(2, 0)$. [2]

204. Скільки різних тензорів можна утворити за допомогою згортки заданого тензора типу $(2, 2)$? [2]

205. Нехай $a_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k = 0$ для будь-якого вектора ξ^i. Довести, що $a_{[ijk]} = 0$. [2]

206. Довести, що $a_j^{(i}a_l^{k)} = a^i_{(j}a^k_{l)}$. [3]

207. Обчислити $\delta^i_j\delta^j_l\delta^l_k\delta^k_i$ та $\delta^i_j\delta^j_k\delta^k_l\delta^l_m$. [3]

208. Довести, що для симетричного по двох перших індексах тензора має місце тотожність $a_{(ijk)} = (a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki})/3$, а антисиметричного по двох перших індексах — відповідно $a_{[ijk]} = (a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki})/3$. [4]

209. Спростити вирази $(a_{ij}g^{jk} + \delta^j_i a_{lj}g^{lk})g_{ks}$, $\delta^i_j\delta^j_k g^{kl}a_{lj}$, $a_{ij}g^{jk}g_{kl}g^{ls}$. [4]

210. Знайти загальний вигляд тензору другого рангу, якщо він залишається незмінним при:

а) повороті на кут π навколо осі z; [5]

б) повороті на кут $\frac{\pi}{2}$ навколо осі z; [5]

в) повороті на довільний кут навколо осі z; [5]

г) при довільних поворотах. [5]

211. Скільки ненульових компонент має тензор четвертого рангу, якщо він залишається незмінним при:

а) повороті на кут π навколо осі z; [5]

б) поворотах на кут π відносно осей x, y та z; [5]

в) при інверсії. [5]

212. Скільки незалежних компонент має тензор третього рангу в $\mathbb{R}^n$, якщо він: повністю симетричний, повністю антисиметричний. [5]

213. Записати загальний вигляд тензора четвертого рангу, який залишається незмінним при довільних поворотах в $\mathbb{R}^3$. Узагальнити цей результат на випадок простору $\mathbb{R}^n$ ("поворотом" в $\mathbb{R}^n$ називається ортогональне перетворення з детермінантом $+1$). [5]

214. Тензор пружних сталих твердого тіла має такі властивості симетрії $\lambda_{ijkl} = \lambda_{klij} = \lambda_{jikl} = \lambda_{ijlk}$. Скільки незалежних компонент (та які саме) має цей тензор? [5]

215. Скільки незалежних компонент (та які саме) має тензор тензор пружних сталих (дивись попередню задачу) для кристалу з кубічною симетрією та для ізотропного тіла, якщо при перетвореннях симетрії тіла тензор пружних сталих залишається незмінним. Для останнього випадку знайдіть явний вигляд тензору λ_{ijkl}. [5]

216. Нехай тензор третього рангу T в n-вимірному просторі є симетричним по першій парі індексів і обертається в нуль при згортці по всім індексам з довільним вектором $\boldsymbol{a}$, тобто $T_{ijk}a_ia_ja_k = 0$. Доведіть, що для тензор T виконано співвідношення $T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0$. [5]

217. Скільки незалежних компонент має тензор третього рангу T в n-вимірному просторі, якщо для довільного вектору $\boldsymbol{a}$ виконано рівність $T_{ijk}a_ia_ja_k = 0$. [5]

218. Знайти середні значення n_in_j та $n_in_jn_kn_l$ добутків компонент вектора $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ в m-вимірному просторі. Усереднення проводиться за всіма можливими орієнтаціями вектора $\boldsymbol{n}$, тобто

$$F_{\text{сер}} = \frac{1}{\Omega}\int F(\boldsymbol{r})\, d\Omega \ ,$$

де $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^m$, а Ω та $d\Omega$ — величина повного тілесного кута та його нескінченно малий елемент. [5]

219. Нехай одиничний вектор $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ рівномірно обертається навколо фіксованого одиничного вектора $\boldsymbol{e}$ так, що кут θ між ними залишається незмінним. Чому дорівнює середнє за часом значення n_in_j? Знайти середнє від добутку $n_in_jn_kn_l$ у випадку, коли $\theta = \pi/2$. [5]

220. Враховуючи симетрію підінтегрального виразу та його тензорну структуру, знайти значення інтегралів

$$I_i = \frac{1}{\Omega}\int \frac{n_i d\Omega}{1 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})} \ , \quad I_{ij} = \frac{1}{\Omega}\int \frac{n_in_j d\Omega}{1 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})} \ , \quad I_{ijk} = \frac{1}{\Omega}\int \frac{n_in_jn_k d\Omega}{1 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})} \ .$$

При цьому значення інтеграла I_0 вважаємо відомим, а саме

$$I_0 = \frac{1}{\Omega}\int \frac{d\Omega}{1 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})} \ ,$$

де $\boldsymbol{a}$ — сталий вектор, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$, а Ω — повний тілесний кут в $\mathbb{R}^n$. Всі вектори належать n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$. [5]

221. Записати в сферичних та циліндричних координатах диференціальні вирази $(\boldsymbol{A}\nabla)B_i$ та $A_j\,\partial B_j/\partial x_i$, де A_i — декартові компоненти вектора $\boldsymbol{A}$. [5]

222. Знайти зв'язок компонент матриць $T_{\text{дек}}$, $T_{\text{сф}}$ та $T_{\text{цил}}$ тензора T другого рангу, які відповідно в декартових, сферичних та циліндричних координатах позначимо

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\varphi} & T_{\varphi z} \\ T_{zr} & T_{z\varphi} & T_{zz} \end{bmatrix}. \ [5]$$

223. Обчислити інтеграл $\iint \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{S}$ по поверхні тора. [5]

224. Обчислити поверхневі інтеграли

$$\iint_{\Omega_V} [\,\boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}]\,]\, dS, \quad \text{та} \quad \iint_{\Omega_V} [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}] \cdot [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}]\, dS\ ,$$

де Ω_V — замкнута поверхня, що охоплює об'єм V, $\boldsymbol{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Ω_V, а $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — сталі вектори. [5]

Бібліографія

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры — изд. 11-е , испр. — М.: Физматлит, 2007, 307 с.

[2] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по линейной алгебре — М.: Физматлит, 2004, 496 с.

[3] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре (будь-яке видання).

[4] Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии — изд. 13-е, стер. — М.: Главн. ред. физ-мат. лит., 1980, 240 с.

Зміст