ЗАДАЧИ К С/К "РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА"

Введение

1. Исходя из квантового представления о свете как о фотонах с 4-импульсом $\hbar k^\mu$ ($k^\mu k_\mu = 0$) показать, что:
а) свободный электрон не может испускать/поглощать фотоны.
б) Излучение фотонов свободным тахионом (для которого $p^\mu p_\mu = -m^2c^2$) возможно. Установить зависимость $E(v)$, $p(v)$ энергии и импульса тахиона от его скорости. Покажите, что излучение фотона должно происходить в черенковский конус ($\cos\theta = c/v$).
в) Возможен ли процесс $\gamma + \gamma \to A$, где A — массивная частица? Если да, то что можно сказать про свойства частицы A?

2. Может ли безмассовая свободная частица иметь конечное время жизни?

3. Рассмотреть принципиальную возможность/невозможность осцилляций (т.е. переходов $A \to B \to A \to \dots$) свободных *безмассовых* частиц.

4. Космические лучи (состоящие в основном из протонов) могут иметь очень большую энергию. Найдите максимальную энергию протона, при которой еще не происходит реакция $p+\gamma \to \pi_0+p$ на реликтовых фотонах (эффект Грайзена - Зацепина - Кузьмина). Температура реликтового излучения $T \simeq 3K$, $m_\pi = 135$ МэВ, $m_p = 940$ МэВ.

5. Найти порог реакции $\gamma + e^- \to 2e^- + e^+$ на свободном покоящемся электроне.

6. Найти закон преобразования для угла рассеяния двух релятивистских частиц равной массы m при переходе из лабораторной системы (θ) в систему центра инерции (χ). Энергия налетающей частицы в лабораторной СО равна E.

7. Показать, что уравнение Паули получается из лагранжиана
$$\mathcal{L} = \frac{c}{2}\,[\psi^\dagger(\pi_0\psi) + (\pi_0\psi)^\dagger\psi] - \frac{1}{2m}\,(\boldsymbol{\sigma\pi}\psi)^\dagger(\boldsymbol{\sigma\pi}\psi), \quad \pi_\mu = i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu. \qquad (1)$$
Вычислите вектор тока в теории Паули: а) сведя уравнения движения к виду 4-дивергенции; б) с помощью теоремы Нётер. Проверить калибровочную инвариантность вектора тока.

8. Найти уравнения движения, соответствующие лагранжианам:
а) $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$, б) $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A^\mu)(\partial^\nu A_\mu)$.
Показать, что эти лагранжианы отличаются на полную дивергенцию.

9. Найти уравнения движения, а также канонический тензор энергии-импульса для лагранжиана $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$.

10. Пусть $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(A_\mu, \partial_\nu A_\mu; \eta^{\mu\nu})$ — лагранжиан для плей A_μ, $\eta^{\mu\nu}$ — метрика Минковского. Метрическим тензором энергии-импульса называется величина
$$T_{\mu\nu} = 2\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda})}\right)_{g=\eta} - \mathcal{L}_0\eta_{\mu\nu} \qquad (2)$$
где $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(A_\mu, \nabla_\nu A_\mu; g^{\mu\nu})$, лагранжиан, получаемый из $\mathcal{L}_0$ заменой $\partial_\mu \to \nabla_\mu$, $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$; ∇_ν — ковариантная производная, $g^{\mu\nu}$ — произвольная метрика. Показати, что:
а) выражение (2) может быть преобразовано к виду
$$T_{\mu\nu} = 2\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\eta^{\mu\nu}} + \partial_\lambda\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_{\alpha,\beta}}\,A_\gamma\Big)\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\Big|_{g=\eta}\right) - \mathcal{L}_0\eta_{\mu\nu}. \qquad (3)$$
где $A_{\alpha,\beta} = \partial A_\alpha/\partial x^\beta$, $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = \partial g^{\mu\nu}/\partial x^\lambda$.
б) Вычислить производную $\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}/\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}$.
в) Найти метрический тензор энергии-импульса для лагранжиана из предыдущей задачи. На какую величине отличаются канонический и метрический ТЭИ?

11. Выяснить, как связаны между собой два метрических ТЭИ, получаемые из одного лагранжиана, записанного через ковариантные ($\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$) и контравариантные ($\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu)$) компоненты полей.

12. С какой точностью определяется тензор энергии-импульса? Показать, что условие симметричности ТЭИ определяет его вид однозначно.

13. Пусть $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ — лагранжиан свободного поля ψ, инвариантный относительно глобальных преобразований $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$, $\alpha = \text{const}$. Показать, что:
а) лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi)$, получающийся из $\mathcal{L}$ заменой $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} A_\mu$ — калибровочно инвариантный;
б) уравнения движения для поля ψ при наличии взаимодействия получаются из уравнений движения для свободного поля заменой $\partial_\mu \to D_\mu$;
в) уравнения движения калибровочно-инвариантные.

Часть 1

1. Показать, что уравнение Клейна – Гордона в форме Шредингера может быть получено из лагранжиана
$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\overline{\Phi}\partial_t\Phi - (\partial_t\overline{\Phi})\Phi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\overline{\Phi}(\sigma_3 + i\sigma_2)\nabla\Phi - m\overline{\Phi}\sigma_3\Phi\,.$$
Установить вид вектора $\overline{\Phi}$ из требования согласованности уравнений на Φ и $\overline{\Phi}$. Вычислить тензор энергии-импульса и показать, что $E = \langle\Phi|H|\Phi\rangle$, $\mathbf{P} = \langle\Phi|\hat{\mathbf{p}}|\Phi\rangle$.

2. Рассмотреть бесспиновую частицу в скалярном поле вида: $U(r) = 0$, $r < r_0$ и $U(r) = \infty$, $r > r_0$. Найти уровни энергии частицы в S-состоянии, вычислить давление на стенки ямы и получить уравнение состояния ($PV = f(E)$). Рассмотреть граничные случаи нерелятивистской и ультрарелятивистской частицы. Сравнить с классической теорией.

3. Найти распределение давления $P(\theta)$ на стенки сферической ямы (см. предыдущую задачу) если частица находится в состоянии с $L = 1$.

4. Рассмотреть наклонное падение (под углом α к нормали) пучка скалярных частиц с массой m на потенциальный барьер
$$U(\mathbf{x}) = U(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z < 0 \\ U_0 & , \quad z > 0 \end{cases}$$
Найти законы отражения и преломления, а также коэффициент прохождения. В частности, рассмотреть случай $E < U_0 + m$; $U(\mathbf{x})$ — скалярное поле.

5. Рассмотреть возможность включения потенциала $\hat{V}(x)$ в уравнение Клейна-Гордона
$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = (\hat{H} + \hat{V})\Phi, \qquad \hat{H} = (\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + m\sigma_3\,,$$
если: а) $\hat{V} = V(x)\mathbb{1}$, б) $\hat{V} = V(x)\sigma_3$, в) $\hat{V} = V(x)(\sigma_3 + i\sigma_2)$. Проанализировать лоренцинвариантность теории.

6. Покажите, что нормировка клейн-гордоновской волновой функции в присутствии электромагнитного поля является калибровочно инвариантной.

7. Докажите, что нормировка дираковского биспинора $\int \psi^\dagger\psi dV = 1$ является инвариантной относительно преобразований Лоренца.

8. Показать, что если для некоторого набора матриц γ^μ, $\mu = \overline{1,n}$ выполняются соотношения $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $\forall\,\mu,\nu$, то эти матрицы линейно независимы. Тут $g^{\mu\nu}$ — произвольный невырожденный тензор.

9. Найти четную часть оператора $S^\mu = (\gamma_5, \mathbf{\Sigma})$ для свободной частицы. Показать, что $S_\mu^{(+)}$ — сохраняется.

10. Показать, что величины $\vec{\gamma}$ и $\vec{\alpha}$ действительно образуют матричные 3-векторы, γ_0 — скаляр, а γ_5 — псевдоскаляр, т.е., что они имеют правильные перестановочные соотношения с оператором углового момента $\hat{\mathbf{J}}$ и четности $\hat{P}$.

11. Найти волновые функции свободной дираковской частицы в состоянии с определенными значениями энергии E, момента J, его проекции J_z и пространственной четности λ_p.

12. Проинтегрируйте операторное уравнение на $\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}$ в теории Дирака и получите эффект "дрожания Шредингера".

13. Получите лагранжиан (1) выполнив нерелятивистский предел лагранжиана
$$\mathcal{L}_D = \frac{c}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^\mu\hat{\pi}_\mu\psi + (\overline{\hat{\pi}_\mu\psi})\gamma^\mu\psi\right] - mc^2\overline{\psi}\psi\,.$$

14. Показать, что вектор тока можно представить в форме $j^\mu = j^\mu_c + j^\mu_p$, где
$$j^\mu_c = \frac{ie\hbar}{2m}\left(\overline{\psi}\partial^\mu\psi - (\partial^\mu\overline{\psi})\psi\right) - \frac{e^2}{m}\,\overline{\psi}\psi A^\mu$$
ток проводимости, а
$$j^\mu_p = \frac{e\hbar}{2m}\,\partial_\nu(\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)$$
ток поляризации.

15. Найти вектор тока $j^\mu = -\delta S_{int}/\delta A_\mu$ для частицы с аномальным магнитным моментом.

16. Найти дивергенцию аксиального тока $j^\mu_5 = \overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$. Показать, что в случае безмассовой частицы этот ток сохраняется. Получите выражение для j^μ_5 из теоремы Нётер, рассмотрев преобразование $\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\psi$.

17. Найти нерелятивистский предел вектора плотности тока дираковской частицы в электро-магнитном поле. Сравнить с аналогичной величиной в теории Паули.

18. Вычислить производную по времени от операторов $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\pi} = \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}$ для частицы в электромагнитном поле. Сравнить с классическими уравнениями движения.

19. Определить фазовые множители у операторов инверсии и отражения в теории Дирака исходя из следующих геометрических соотношений:
    (a) оператор отражения равен произведению операторов инверсии и поворота на угол π;
    (b) оператор поворота на угол 2φ равен произведению двух отражений в плоскостях, проходящих через ось поворота и пересекающихся под углом φ.

20. Показать, что набор матриц $\mathbb{1}$, γ_5, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{\Sigma}$ образует замкнутую алгебру относительно произведения. Докажите, что матрица произвольного собственного лоренцевого преобразования представляется в виде
$$S = c_1\mathbb{1} + ic_2\gamma_5 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{a}_2\mathbf{\Sigma},$$
с действительными константами $c_{1,2}$, $\boldsymbol{a}_{1,2}$.

21. Выразите через набор матриц Γ_i следующие комбинации
$$A_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\,, \quad B = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\,.$$

22. Учитывая тензорную структуру выражений и соображения симметрии, найти следующие коммутаторы/антикоммутаторы:
а) $\{\gamma_5, \sigma_{\alpha\beta}\}$, б) $[\gamma_\mu, \sigma_{\alpha\beta}]$, в) $\{\gamma_\mu, \sigma_{\alpha\beta}\}$, г) $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}]$, д) $\{\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}\}$.

23. Докажите, что след матрицы S несобственного лоренцевого преобразования равен нулю. Покажите, что след матрицы собственного преобразования действителен, не превышает по модулю 4 для поворотов и больше 4 для бустов.

24. Найти закон преобразования билинейных форм $\overline{\psi}_1\psi_2$ и $\overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2$ при обращении времени.

25. Показать, что оператор S собственного лоренцевого преобразования коммутирует с оператором зарядовой четности.

26. Показать, что внутренние четности частицы и античастицы со спином 0 одинаковые.

27. Найти оператор зарядового сопряжения для уравнения Клейна – Гордона в форме Шредингера.

28. Существует ли "парадокс" Клейна для дираковской частицы в скалярном поле? То же для скалярной частицы а) в скалярном поле, б) в электростатическом поле $V = e\varphi$.

29. Найти среднее значение вектора скорости свободной дираковской частицы. Чему равно среднеквадратичное отклонение $\sqrt{\langle(\Delta\vec{v})^2\rangle}$? Найти минимальное и максимальное значения этой величины. Сравнить с нерелятивистским случаем. Найдите $\langle(\Delta\vec{v})^2\rangle$ для свободной клейн-гордоновской частицы. Как пояснить полученный результат?

30. Найти среднее значение вектора спина свободной дираковской частицы, движущейся вдоль оси z с импульсом $\vec{p}$ (спиновое состояние — произвольное). Рассмотреть нерелятивистский и ультрарелятивистский случаи.

31. Показать, что для свободной дираковской частицы с массой $m = 0$ оператор γ_5 коммутирует с $\hat{H}$ и $\hat{\vec{p}}$. Найти их общие волновые функции и установить связь между собственными значениями оператора γ_5 и спиральностью. Показать, что операторы $P = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ являются проекционными. На какие состояния они проектируют?

32. Доказать, что для безмассовой частицы квантовое число спиральность является лоренцевым инвариантом.

33. Показать, что наборы матриц $\{\gamma_\mu\}$ и $\{-\gamma_\mu\}$ унитарно подобны. Отсюда следует, что в теории Дирака отрицательных масс не существует, т.е. уравнение Дирака можно записать в виде

$$(\gamma^\mu \hat{\pi}_\mu + m)\psi = 0$$

и при этом интерпретировать константу m как массу электрона.

34. Рассмотреть частицу со спином 1/2 в скалярном поле вида

$$U(z) = \begin{cases} 0 & , \quad |z| > a \\ -U_0 & , \quad |z| < a \end{cases} , \qquad U_0 > 0\,.$$

Показать, что при любых параметрах ямы уровни с верхнего континуума никогда не перекрываются с уровнями нижнего континуума, т.е. рождение пар невозможно.

35. Показать, что для сферически симметричной непроницаемой ямы граничные условия принимают вид $f + g = 0$, где $g(r)$, $f(r)$ — радиальные части спиноров φ и χ.

36. Найти закон преобразования величины $\overline{\psi}\psi_c$ при собственных и несобственных ортохронных лоренцевых преобразованиях.

37. Рассмотреть $(1 + 1)$- и $(2 + 1)$-мерный аналоги уравнения Дирака. Найти представления для γ-матриц, а также аналог матрицы γ_5. Построить операторы углового момента, пространственной инверсии и зарядового сопряжения.

38. Найти решение уравнений Дирака для свободной частицы в $(2 + 1)$-мерии с заданными:
а) энергией и импульсом; б) энергией и моментом.

39. Четырехкомпонентность волновой функции в теории Дирака обычно трактуется как проявление четырех степеней свободы: двух спиновых и двух зарядовых (частица-античастица). Проверить, работает ли эта интерпретация в $(2+1)$-мерии.

40. Рассмотрим пятикомпонентное поле $\Psi = (\varphi, \psi^\mu)$, подчиняющееся уравнениям движения

$$\hat{p}_\mu \psi^\mu = m\,\varphi\,, \qquad \hat{p}_\mu \varphi = m\,\psi_\mu\,.$$

Частицу с каким спином описывает поле Ψ? Постройте для этой теории лагранжиан, тензор энергии-импульса и сохраняющийся вектор тока. Найдите нормированные решения для свободной частицы и наблюдаемые значения энергии и импульса.

41. Как изменяется гамильтониан $H_{int} = \frac{i\mathfrak{s}}{2}\,\beta\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}$ при зарядовом сопряжении? Как связаны между собой магнитные моменты частицы и античастицы?

42. Доказать равенства ($\psi_i(p)$ — спиноры с определенной поляризацией/спиральностью):

$$\sum_{i=1,2} \psi_i(p)\overline{\psi}_i(p) = \frac{\not{p}+m}{2m}, \qquad \sum_{i=3,4} \psi_i(p)\overline{\psi}_i(p) = \frac{\not{p}-m}{2m}.$$

43. Найти энергетический спектр и волновые функции дираковской частицы в однородном магнитном поле. Каковы характерные отличия от нерелятивистского случая. То же для скалярной частицы.

44. Найти операторы $\hat{h}^0 = \frac{\hbar}{2m}\,\hat{H}\gamma_5^{(+)}$, $\hat{\boldsymbol{h}}_\parallel = \frac{\hbar}{2m}\,\hat{H}(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\mathcal{H}})^{(+)}$ для частицы в постоянном магнитном поле. Показать, что они являются интегралами движения. Сравнить с теорией Баргмана – Мишеля – Телегди.

45. Непосредственной проверкой показать, что сферические спиноры Ω_{jj_zl} и $\Omega_{jj_zl'}$ являются собственными функциями операторов J^2 и J_z.

46. Найти лагранжиан, тензор энергии-импульса и вектор тока для вейлевских ξ, η частиц.

47. Найти вид оператора обращения времени $\hat{T}$ в теории Вейля. Чему равен оператор $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$?

48. Показать, что в теории двухкомпонентного нейтрино нарушаются C и P парности, но сохраняется комбинированная CP-парность.

Часть 2

1. Найти нерелятивистский предел свободного пропагатора $G_0(x-x')$. Для этого выполните нерелятивистский переход в уравнении

РКМ: $$\psi^{(+)}(x) = \int G_0(x-x')\gamma_0\psi(x')dV', \qquad (t>t')$$

сведя его к определению нерелятивистского пропагатора

НКМ: $$\Theta(t-t')\varphi(x) = \int G_0(x-x')\varphi(x')dV'.$$

2. Получить сечение рассеяния позитрона в кулоновском поле в первом порядке теории возмущений. Зависит ли сечение рассеяния от относительный знаков ядра и частицы (в первом порядке теории возмущений)? А при переходе к высшим порядкам теории возмущений?

3. Получить сечение рассеяния лептона на барионе в ультрарелятивистском (по лептону) пределе (формула Розенблюта).

4. Получить сечение рассеяния нерелятивистского электрона на тяжелом ($M \gg m$) незаряженном адроне с магнитным моментом $\mathfrak{s} = \frac{e\hbar}{2Mc}\,F_m(0)$. Сравнить с формулой Резерфорда для $Z = F_m(0)$.

5. Получить сечение рассеяния ультрарелятивистского электрона на скалярном адроне.

6. Рассмотрим рассеяния электрона на неподвижном ядре, которое описывается плотностью заряда $\rho(\boldsymbol{r})$. Рассеяние происходит в поле $A_0(\boldsymbol{r})$, которое определяется из уравнения

$$\Delta A_0(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})\,, \qquad \int \rho(\boldsymbol{r}) dV = eZ,$$

где e — элементарний заряд (заряд электрона по модулю).

1. Показать, что

$$A_0(\boldsymbol{r}) = e \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}\boldsymbol{r}} \frac{\hbar^2 F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 - i\varepsilon} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^3}\,,$$

где

$$eF(\mathbf{q}) = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}\boldsymbol{r}} \rho(\boldsymbol{r}) dV \tag{4}$$

— Фурье образ $\rho(\boldsymbol{r})$ (электрический формфактор). В частности $F(0) = Z$.

2. Получить обобщение формулы Мотта

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2\alpha^2 E^2}{4p^4} \cdot \frac{1 - v^2\sin^2\theta/2}{\sin^4\theta/2}\, |F(\mathbf{q})|^2. \tag{5}$$

3. В случае нерелятивистских электронов (для которых длина де-Бройля $\hbar/|\mathbf{q}| \gg R$, R — радиус ядра) формула (5) позволяет экспериментально измерять средне-квадратичный радиус ядра $\langle r^2 \rangle$. Раскладывая подынтегральное выражение (4) в ряд по $\frac{\mathbf{q}\boldsymbol{r}}{\hbar}$ показать, что в случае сферично-симметричного распределения $\rho(r)$

$$F(\mathbf{q}) \simeq Z\Big(1 - \frac{\mathbf{q}^2\langle r^2\rangle}{6\hbar^2}\Big),$$

где $\langle r^2 \rangle \equiv \int r^2\rho(r)dV / \int \rho(r)dV$.

7. Найти сечение рассеяния электрона на тяжелом ($M \to \infty$) скалярном адроне. Сравнить полученное выражение с формулой (5).

8. Получить сечение электромагнитного рассеяния адрона со спином $1/2$ на скалярном адроне. Рассмотреть ультрарелятивистский предел.

9. Получить сечение рассеяния электрона на электроне и электрона на позитроне. Рассмотреть нерелятивистский предел этих формул.

10. Получить сечение электромагнитного рассеяния для двух тождественных скалярных адронов. Рассмотреть нерелятивистский предел.

11. Найти сечение аннигиляции $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ поляризованных электронов (со спиральностями λ_1, λ_2) в мюонную пару (спиральности λ_1', λ_2') в ультрарелятивистском (безмассовом) пределе (для обеих частиц). Использовать технику проекционных операторов.

12. Доказать следующие теоремы.

Теорема 1. $\mathrm{Tr}(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n+1}) = 0;$
$\mathrm{Tr}(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n) = \mathrm{Tr}(\gamma_n\gamma_{n-1}\ldots\gamma_1).$

Теорема 2. $\mathrm{Tr}\gamma_5 = \mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0;$
$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$

Теорема 3. $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4\cdot\mathbb{1};$
$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu;$
$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}\mathbb{1};$
$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu;$
$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu = 2(\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho).$

Теорема 4. $\mathrm{Tr}(\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2}\ldots\gamma_{\alpha_n}) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k g_{\alpha_1\alpha_k}\,\mathrm{Tr}\,(\gamma_{\alpha_2}\ldots\gamma_{\alpha_n})'_k.$