

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Горкавенко Володимир Миколайович

Прикладна квантова електродинаміка

Методичний посібник для студентів фізичного факультету

Київ – 2011

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1 Ймовірність розпаду та переріз розсіяння частинок	6
Розділ 2 Загальні питання обрахунку $ M_{fi} ^2$	18
Розділ 3 Кулонівське розсіяння	23
Розділ 4 Електрон-електронне розсіяння	32
Розділ 5 Електрон-фотонне розсіяння	41
Розділ 6 Електрон-позитронна анігіляція в два фотона	57
Розділ 7 Народження частинок при електрон-позитронних зіткненнях	62
Розділ 8 Розпад Z-бозону	71
Розділ 9 Розпад мюона	77
Література	85

ВСТУП

Квантова теорія поля виникла в кінці 20-х років ХХ-століття. Її початком часто вважають роботу Дірака 1927 року. Причиною її виникнення була потреба в опису фізики при високих енергіях як теорії, що повинна враховувати як релятивістські ефекти, так і ефекти, пов'язані з перетворенням частинок та зміною їх кількості під час фізичних процесів.

В квантовій теорії поля елементарні частинки є квантами відповідних полів, а їх взаємодія відбувається за рахунок обміну квантами полів, що переносять взаємодію.

Історично, першими полями, з якими мала справу квантова теорія поля, були електромагнітні та ферміонні (електрон-позитронне) поля, як єдині відомі на той момент. Для опису взаємодій між квантами цих полів була створена квантова електродинаміка.

На початку свого існування фізичні процеси розглядалися в так званому канонічному формалізмі, заснованому на безпосередньому використанні операторів народження-знищення. Це був достатньо громіздкий метод, на зміну якого в 1948 році прийшов потужний метод, заснований на діаграмній техніці Фейнмана, що використовується й зараз. Величезною перевагою методу Фейнмана є фізична наочність діаграмного підходу та відносна простота в математичному описі взаємодій між частинками.

З часом стало зрозуміло, що окрім електрон-позитронного та електромагнітного полів існують також поля, яким відповідають інші елементарні частинки — мюони, тау-лептон, нейтрино, кварки; а також поля, кванти яких відповідають за нові взаємодії — W^\pm , Z бозони (слабка взаємодія), глюони (сильна взаємодія).

В 70-х роках ХХ-століття була створена Стандартна модель, яка на даний момент претендує на опис електромагнітної, слабкої та сильної взаємодії між елементарними частинками і повністю узгоджується з експериментом, за виключенням деяких моментів, за якими стоїть вже нова фізика.

Даний методичний посібник є логічним продовженням методичного посібника "Початковий курс з квантової електродинаміки та діаграмної техніки Фейнмана" (2009 рік) та написаний на основі практич-

них занять зі спеціального курсу “Прикладна квантова електродинаміка”.

Метою даного методичного посібника є навчити читача знаходити перерізи розсіяння та реакцій, а також ширини розпадів частинок в квантовій електродинаміці та Стандартній моделі в скелетному наближенні вважаючи, що амплітуда процесу є відомою (знаходженню амплітуди процесу саме й був присвячений методичний посібник “Початковий курс з квантової електродинаміки та діаграмної техніки Фейнмана”). Тобто, метою даного посібника є навчити безпосередньо отримувати величини, які можна порівняти з експериментальними даними.

В Розділі 1 методичної роботи показано як записуються вирази для перерізів розсіяння та реакцій, а також ширини розпадів частинок через елементи \hat{S} -матриці. Розділ 2 присвячений зведенню проблеми розрахунку квадрату модуля амплітуди процесу до розрахунку згорток від γ -матриць та наведено техніку обрахунку згорток. В Розділах 3 – 9 наведено приклади розрахунку основних процесів в квантовій електродинаміці та Стандартній моделі; проведено порівняння з експериментальними даними.

В даному методичному посібнику використовуються позначення та посилання на формули посібника “Початковий курс з квантової електродинаміки та діаграмної техніки Фейнмана”. Наприклад, посилання на формулу I.2.6 означає посилання на формулу 6 Розділу 2 зазначеного посібника, а посилання на формулу D2.6 означає посилання на формулу 6 Додатку 2 зазначеного посібника

Автор висловлює подяку рецензентам Гусиніну В.П. та Каденко І.М. за корисні поради та зауваження.

Автор буде вдячний за зауваження та побажання щодо покращення даного посібника. Їх ви можете надіслати за електронною адресою gorka@univ.kiev.ua Електронну версію методичної роботи можна отримати на сайті www.qft.univ.kiev.ua/people/gorkav/gorkav_u.html

РОЗДІЛ 1

Ймовірність розпаду та переріз розсіяння частинок

Розглянемо два найбільш важливих випадки опису взаємодії частинок згідно формули (I.1.43). По-перше, процес розпаду однієї частинки $N_i = 1$ на дві інші $N_i = 2$. По-друге, процес взаємодії (розсіяння) двох частинок $N_i = 2$, внаслідок чого їх характеристики змінюються і вони переходять в кінцевий стан $N_f = 2$.

$N_i = 1$

Розглянемо розпад однієї частинки на дві частинки. Тобто $N_i = 1$, $N_f = 2$. Нехай перша частинка має 4-імпульс E_1, \vec{p}_1 , а дві утворені: E_3, \vec{p}_3 та E_4, \vec{p}_4 . Тоді ймовірність переходу системи з початкового стану i в кінцевий стан f за одиницю часу (I.1.43) дорівнюватиме

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(E_1 - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2}{E_1 E_3 E_4} d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4. \quad (1.1)$$

Давайте розглядати процес розпаду в системі центру інерції, тобто коли початкова частинка покоїлась: $\vec{p}_1 = 0$, $E_1 = M$, де M – маса початкової частинки. Тоді

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(M - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2}{M E_3 E_4} d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4 = B d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4, \quad (1.2)$$

де літерою B ми для зручності позначили частину виразу для ймовірності переходу, що не включає в себе диференціали по імпульсам кінцевих частинок.

Отриманий вираз (1.2) визначає ймовірність розпаду однієї частинки в дві інші з характеристиками p_3 та p_4 , що задані з точністю $d\vec{p}_3, d\vec{p}_4$. Однак даний вираз має явний недолік: його важко порівняти

з величинами, що експериментально спостерігаються внаслідок наявності дельта-функцій. В принципі, це є природнім, оскільки в (1.2) забагато зайвої інформації. Величини p_3, p_4 не є довільними, а пов'язані законами збереження, що містяться в аргументах дельта-функцій.

Справді, якщо знаємо \vec{p}_4 , то однозначно відомо й \vec{p}_3 . Отже, давайте будемо вимірювати лише \vec{p}_3 , не звертаючи уваги яким буде \vec{p}_4 . Математично це буде відповідати знаходженню ймовірності переходу системи в стан з фіксованим значенням \vec{p}_3 та в усі стани по \vec{p}_4 , тобто інтегруванню по $d^3\vec{p}_4$. При цьому фізичне значення \vec{p}_4 автоматично отримується завдяки наявності відповідної дельта-функції:

$$\int d^3\vec{p}_4 [B d^3\vec{p}_3] = \frac{\delta(M - E_3 - E_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \left. \frac{|M_{fi}|^2}{ME_3E_4} \right|_{\vec{p}_3 = -\vec{p}_4} \cdot d^3\vec{p}_3 \quad (1.3)$$

Тепер потрібно позбавитися від дельта-функції від енергії, тобто знайти ймовірність переходу в усі можливі стани по сумарній енергії кінцевих частинок проінтегрувавши по $d(E_3 + E_4)$. Для цього зазначимо, що

$$\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \Rightarrow |\vec{p}_3|^2 = |\vec{p}_4|^2 \Rightarrow |\vec{p}_3||d\vec{p}_3| = |\vec{p}_4||d\vec{p}_4|; \quad (1.4)$$

$$E_3^2 = \vec{p}_3^2 + m_3^2 \Rightarrow |E_3||dE_3| = |\vec{p}_3||d\vec{p}_3|; \quad (1.5)$$

$$E_4^2 = \vec{p}_4^2 + m_4^2 \Rightarrow |E_4||dE_4| = |\vec{p}_4||d\vec{p}_4|; \quad (1.6)$$

Тоді

$$d(E_3 + E_4) = \frac{|\vec{p}_3||d\vec{p}_3|}{E_3} + \frac{|\vec{p}_4||d\vec{p}_4|}{E_4} = \left(\frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} \right) |\vec{p}_3||d\vec{p}_3| \Rightarrow \quad (1.7)$$

$$d\vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2 |d\vec{p}_3| d\Omega_3 = \frac{E_3 E_4}{E_3 + E_4} d(E_3 + E_4) |\vec{p}_3| d\Omega_3, \quad (1.8)$$

і вираз (1.3) можна записати як

$$\int [B d^3\vec{p}_3] d^3\vec{p}_4 = \frac{\delta(M - E_3 - E_4) d(E_3 + E_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \left. \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{M(E_3 + E_4)} \right|_{\vec{p}_3 = -\vec{p}_4} \quad (1.9)$$

Провівши інтегрування по $d(E_3 + E_4)$ отримаємо ймовірність розпаду за одиницю часу початкової частинки на дві частинки, одна з

яких має імпульс, що за модулем дорівнює $|\vec{p}_3|$, а за напрямком знаходиться в межах тілесного кута $d\Omega_3$:

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{M^2}. \quad (1.10)$$

Значення модуля імпульсу, спільне для обох частинок, легко знайти з закону збереження енергії

$$M^2 = (m_3 + |\vec{p}_3|^2)^2 + (m_4 + |\vec{p}_3|^2)^2. \quad (1.11)$$

Воно визначається виключно значеннями мас кінцевих частинок і становить

$$|\vec{p}_3| = \frac{M}{2} S(M, m_3, m_4), \quad (1.12)$$

де $S(M, m_3, m_4)$ – безрозмірна функція, що менша за одиницю:

$$S(M, m_3, m_4) = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{M}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{m_3 - m_4}{M}\right)^2\right]}. \quad (1.13)$$

Повна ймовірність розпаду за одиницю часу буде, відповідно,

$$\Gamma = \int d\Gamma, \quad [\Gamma] = \frac{1}{[\text{час}]}. \quad (1.14)$$

У випадку коли в кінцевому стані буде дві тотожні частинки, то, згідно Розділу 1, результат інтегрування потрібно розділити на 2.

У випадку, коли ймовірність розпаду не залежить від напрямку¹, в якому частинки розлітаються, вираз (1.10) можна проінтегрувати по тілесному куту та отримати значення повної ширини двочастинкового розпаду частинки з масою M , в системі центру інерції, на частинки з масами m_3 та m_4 у вигляді

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi M} \cdot |M_{fi}|^2 S(M, m_3, m_4), \quad (1.15)$$

де при обчисленні функції $|M_{fi}|^2$ потрібно використовувати значення модуля імпульсу частинок, що розлітаються (1.12).

¹Для частинок зі спіном з певною поляризацією, в загальному випадку, це не так, оскільки величина $|M_{fi}|^2$ може залежати від кута між напрямком спіну початкової частинки та напрямком імпульсу частинок, що розлітаються.

Якщо частинка може розпадатися по декільком каналам реакції, то повна ймовірність розпаду буде

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i, \quad (1.16)$$

де Γ_i ймовірність розпаду в i -тому каналі.

Отже, розпад частинок характеризується ймовірністю розпаду за одиницю часу Γ (шириною розпаду). Її можна розуміти як відношення кількості частинок, що розпалися за одиницю часу до загальної кількості частинок. Характерний час життя частинки при цьому визначається як

$$\tau = 1/\Gamma. \quad (1.17)$$

Розглянемо систему з багатьох частинок (N), що розпадається. Очевидно, що зміна кількості частинок з часом є пропорційною кількості цих частинок з коефіцієнтом пропорційності Γ :

$$dN/dt = -\Gamma N. \quad (1.18)$$

Отже в кількість частинок, що не розпалися до певного моменту часу t є

$$N = N_0 e^{-\Gamma(t-t_0)}, \quad (1.19)$$

де N_0 — початкова кількість частинок в момент часу t_0 .

$N_i = 2$

Розглянемо процес розсіяння однієї частинки на іншій. Нехай до взаємодії частинки характеризуються 4-імпульсом та масою (p_1, m_1) та (p_2, m_2) , а після взаємодії — (p_3, m_3) та (p_4, m_4) відповідно. Тобто $N_i = 2$, $N_f = 2$, тоді ймовірність переходу системи з початкового стану i в кінцевий стан f за одиницю часу (I.1.43) дорівнюватиме:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{V^2 6\pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4}{E_1 E_2 E_3 E_4}. \quad (1.20)$$

Давайте розглянемо процес в системі центру інерції:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)}{V^2 6\pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4}{E_1 E_2 E_3 E_4}. \quad (1.21)$$

По аналогії з проробленим вище описом розпаду частинки, вираз (1.21) можна проінтегрувати по $d\vec{p}_4$ та, враховуючи, що співвідношення (1.8) справедливе і в цьому випадку, проінтегрувати по сумарній енергії кінцевих частинок. Таким чином отримуємо ймовірність переходу за одиницю часу двох початкових частинок в дві кінцеві частинки, одна з яких має імпульс, що за модулем дорівнює $|\vec{p}_3|$, а за напрямком знаходиться в межах тілесного кута $d\Omega_3$:

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{2^6 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{E_1 E_2 E}, \quad (1.22)$$

де $E = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ – інваріант руху в системі.

З явного вигляду (1.22) випливає, що дана величина не є однозначно заданою (величина V може бути задана довільно великою). Більш того, коли зробити фізичний перехід $V \rightarrow \infty$, то ймовірність процесу буде прямувати до нуля. В цьому немає нічого дивного, оскільки в нашій постановці задачі в початковому стані ми мали дві частинки, що довільно розташовані в нескінченно великому просторі. Ми довільно задали напрямок їх імпульсів і при цьому, звичайно, ймовірність того, що ці частинки підійдуть одна до одної на якусь кінцеву відстань, на якій вони зможуть провзаємодіяти, прямує до нуля. Тобто, співвідношення (1.22) не придатне для практичного використання й його потрібно довідзначити.

Згадаємо визначення перерізу розсіяння. У випадку, коли потік частинок летить на нерухому незмінну мішень (так званий розсіювачий центр) переріз розсіяння визначається як відношення числа частинок N , що розсіялись за одиницю часу, до загального числа частинок N_0 , що проходять за одиницю часу через одиницю поверхні площі поперечного перерізу пучка S (тобто до поверхневої густини частинок за одиницю часу $n = N_0/S$):

$$\sigma = \frac{N}{n} = \frac{N}{N_0} S, \quad [\sigma] = [\text{довжина}^2]. \quad (1.23)$$

Тоді, якісно можна розуміти величину перерізу розсіяння як прицільної площі ($N = \text{формально} = n\sigma$), в яку повинна попасти частинка, щоб хоч якось змінити свої характеристики (розсіятися).

Вводять також поняття диференційного перерізу розсіяння $d\sigma$, що визначається як $d\sigma = dN/n$, де dN – число частинок, що розсіялись за одиницю часу та мають певні виділені характеристики (наприклад,

розсіялись в певному кутовому діапазоні). Величина $d\sigma$ повністю визначається законом взаємодії частинок з мішенню і є головною характеристикою процесу розсіяння.

У випадку, коли відбувається зіткнення пучків частинок визначення перерізу розсіяння модифікується. Нехай існує один пучок частинок з об'ємною густиною частинок n_1 (підкреслюємо, об'ємна, а не поверхнева густина, як в попередньому випадку) та швидкістю частинок в ньому v_1 та другий пучок з характеристиками, відповідно, n_2 та v_2 . Нехай частинки в цих пучках будуть напрямлені назустріч одна одній. В системі відліку, в якій частинки 2 нерухомі задача зводиться до зіткнення частинок пучка 1 з нерухомою мішенню. В цьому випадку число зіткнень, що відбуваються в об'ємі V впродовж часу t дорівнює

$$N = \sigma v_{\text{відн}} n_1 n_2 V t, \quad ([\sigma] = \text{довжина}^2), \quad (1.24)$$

де σ — переріз розсіяння, характеристика взаємодії частинок пучків між собою, $v_{\text{відн}}$ — швидкість частинок 1 в системі відліку, в якій частинки 2 нерухомі. В наведеному виразі $n_2 V$ можна розуміти як кількість частинок мішені в об'ємі V , а $\sigma v_{\text{відн}} t n_1$ — як кількість частинок 1, що прийняли участь у взаємодії.

Кількість зіткнень є величиною інваріантною. Спробуємо записати її в довільній системі відліку у вигляді:

$$N = A n_1 n_2 dV dt, \quad (1.25)$$

де A величина, яку ми далі визначимо. Про A відомо лише те, в системі спокою частинок мішені $A = \sigma v_{\text{відн}}$. При цьому під σ ми будемо завжди мати на увазі переріз розсіяння в системі відліку, де мішень покоїться.

Оскільки комбінація Vt^1 є інваріантною величиною по відношенню до перетворень Лоренца, то комбінація $A n_1 n_2$ також повинна бути інваріантом. Відомо, що кількість частинок є інваріантом $nV = \dot{n}v$, де об'єм змінюється як $V = V_0 \sqrt{1-v^2}$, а знак 0 означає приналежність до системи спокою частинок. Отже густина частинок веде себе як $n = n_0 / \sqrt{1-v^2} = n_0 E/m$, де $E = m/\sqrt{1-v^2}$ — є енергією частинки. Тоді інваріантом буде також величина $A E_1 E_2$. Більш зручно записати інваріант у вигляді

$$A \frac{E_1 E_2}{p_{1\nu} p_{2\nu}'} = \dot{n} v, \quad (1.26)$$

¹При лоренцевих бустах $V = V_0 \sqrt{1-v^2}$, $t = t_0 / \sqrt{1-v^2}$. Нижній знак 0 означає приналежність до системи спокою частинок.

бо в системі спокою частинок 2 цей інваріант, як легко переконатись, дорівнює A . З іншого боку в цій системі відліку $A = \sigma v_{\text{відн}}$. Отже, в довільній системі відліку

$$A = inv \frac{p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu}}{E_1 E_2} = \sigma v_{\text{відн}} \frac{p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu}}{E_1 E_2}. \quad (1.27)$$

Вираз для $v_{\text{відн}}$ легко отримати використавши 4-добуток $p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu}$. В системі спокою частинки 2

$$p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu} = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_{\text{відн}}^2}} \Rightarrow v_{\text{відн}} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu})^2}}. \quad (1.28)$$

Остаточно, кількість зіткнень можна записати як

$$N = \sigma \frac{\sqrt{(p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu})^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} n_1 n_2 V t, \quad (1.29)$$

звідки для перерізу розсіяння отримуємо

$$\sigma = \frac{N}{n_1 n_2 V t} \frac{E_1 E_2}{\sqrt{(p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu})^2 - m_1^2 m_2^2}}. \quad (1.30)$$

В теорії поля взаємодія відбувається в усьому об'ємі $V \rightarrow \infty$ за весь час $T \rightarrow \infty$, тоді

$$\sigma = \frac{1}{T} \frac{N}{N_1 N_2} \frac{V E_1 E_2}{\sqrt{(p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu})^2 - m_1^2 m_2^2}} = \frac{1}{T} \frac{N}{N_1 N_2} \frac{1}{j}, \quad (1.31)$$

де N_1, N_2 — кількість частинок в пучках, $\frac{1}{T} \frac{N}{N_1 N_2}$ — ймовірність переходу системи за одиницю часу з одного стану в інший, див. (I.1.43), а j визначається як

$$j = \frac{I}{V E_1 E_2}, \quad \text{де } I = \sqrt{(p_{1\nu} p_{2\nu}^{\nu})^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (1.32)$$

Можна показати, що в системі центру інерції

$$I = |\vec{p}_1| (E_1 + E_2). \quad (1.33)$$

Врахувавши, що $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ та $\vec{p} = E\vec{v}$ приходимо до висновку, що величина j за фізичним змістом є об'ємною густиною потоку частинок, що провзаємодіють:

$$j = \frac{|\vec{p}_1|}{V} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|}{V}, \quad (1.34)$$

де \vec{v}_1, \vec{v}_2 — швидкості частинок¹.

Корисно відмітити, що за допомогою визначення повного перерізу розсіяння (1.24) можна визначити довжину вільного пробігу l та характерний час між зіткненнями частинок τ . Справді, щоб визначити зазначені характеристики для однієї частинки сорту 1 потрібно в (1.24) покласти $n_1 V = 1$ та розглядати випадок, коли відбувається лише одне зіткнення, тоді

$$\tau_1 = \frac{1}{\sigma v_{\text{відн}} n_2}; \quad l_1 = v_{\text{відн}} \tau_1. \quad (1.35)$$

Поняття диференційного перерізу розсіяння $d\sigma$ вводиться аналогічно: замість N вводиться dN , що представляє число подій взаємодії, внаслідок яких частинки отримали певні виділені характеристики (наприклад, розсіялись в певному кутовому діапазоні).

Замість співвідношення (1.22), що виражає ймовірність переходу системи за одиницю часу з одного стану в інший, для опису взаємодії частинок будемо використовувати переріз розсіяння (1.31), (1.32), як відношення ймовірності переходу системи за одиницю часу зі стану i в стан f до об'ємної густини потоку частинок, що провзаємодіють

$$d\sigma = \frac{d\Gamma_{i \rightarrow f}}{j}. \quad (1.36)$$

Отже, розсіяння двох частинок в системі центру інерції (див. (1.32), (1.33)) описується диференційним перерізом розсіяння у формі

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = / (1.22) / = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2}{E^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} d\Omega_3, \quad (1.37)$$

де $E = E_1 + E_2$ — повна енергія системи. Якщо в результаті взаємодії тип частинок не змінився (не змінилися їх маси), то $|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|$ і вираз для перерізу спрощується:

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|M_{fi}|^2}{E^2} d\Omega_3. \quad (1.38)$$

Відмітимо, що наведений вираз (1.36) можна застосовувати і у випадку коли кількість початкових частинок $N_i = 2$, а кількість кінцевих частинок N_f будь-яка. Справді, дане визначення позбавляє від

¹Об'ємна густина потоку частинок, що летять назустріч одна одній, $\vec{j} = n_1 \vec{v}_1 - n_2 \vec{v}_2$. У випадку двох частинок $n_1 = n_2 = N_{1,2}/V = 1/V$, тобто $\vec{j} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)/V$. Тоді $|\vec{j}| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|/V = (|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|)/V$, що й співпадає з (1.34)

об'єму у виразі для ймовірності переходу (I.1.43), куди об'єм входить у ступені V^{1-N_i} незалежно від числа N_f .

Звертаємо увагу, якщо в кінцевому стані будуть N тотожних частинок, то, згідно Розділу 1, результат інтегрування потрібно розділити на $N!$.

Розсіяння в зовнішньому постійному полі

Коли частинка розсіюється у зовнішньому постійному полі, або у випадку, коли в системі центру інерції одна частинка з (E_{i1}, \vec{p}_{i1}) розсіюється на набагато важчій за себе частинці ¹ $(E_{i2}, 0)$, енергія легшої частинки не змінюється, а змінюється лише напрямок її імпульсу. Тому замість (I.1.34) потрібно представляти S -матрицю у вигляді

$$\hat{S}_{fi} = \delta_{fi} + i2\pi T_{fi} \delta \left(\sum_{\beta=1}^{N_f} E_{f\beta} - E_{i1} \right), \quad (1.39)$$

де ми врахували, що початкова частинка після взаємодії може розпастися на N_f кінцевих частинок.

Діючи по аналогії з (I.1.34) – (I.1.43) отримаємо ймовірність переходу за одиницю часу з початкового стану i в множину станів поблизу кінцевого стану f :

$$d\tilde{\Gamma}_{i \rightarrow f} = \frac{(2\pi) \left(\sum_{\beta=1}^{N_f} E_{f\beta} - E_{i1} \right)}{2VE_{i1}} |M_{fi}|^2 \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_{f\beta}}{(2\pi)^3 2E_{f\beta}}. \quad (1.40)$$

Переріз розсіяння отримується згідно (1.36). В системі центру інерції $j = |\vec{p}_{i1}|/(VE_{i1})$ згідно (1.32), (1.33) в наближенні $E_{i2} \rightarrow \infty$:

$$d\sigma = \frac{d\tilde{\Gamma}_{i \rightarrow f}}{j} = \frac{(2\pi)\delta \left(\sum_{\beta=1}^{N_f} E_{f\beta} - E_{i1} \right)}{2|\vec{p}_{i1}|} |M_{fi}|^2 \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_{f\beta}}{(2\pi)^3 2E_{f\beta}}. \quad (1.41)$$

У випадку пружного розсіяння, тобто коли в кінцевому стані залишилась та сама частинка, можна записати $d^3 \vec{p}_{f1} = |\vec{p}_{f1}|^2 d\vec{p}_{f1} d\Omega =$

¹В цьому випадку, в системі центру інерції важча частинка може розглядатися як нерухоме джерело постійного зовнішнього поля.

$|\vec{p}_{f1}|E_{f1}dE_{f1}d\Omega$ та $|\vec{p}_{f1}| = |\vec{p}_{i1}|$. Тоді, проінтегрувавши по енергії, отримуємо

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2} |M_{fi}|^2 d\Omega. \quad (1.42)$$

Кінематичні інваріанти

Якщо, при розсіянні частинок, в початковому та кінцевому станах знаходяться по дві частинки, то незалежно від сорту частинок та закону їх взаємодії будуть виконуватися закони збереження чотириімпульсу:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0, \quad (1.43)$$

де будь-які два 4-імпульси відносяться до початкових частинок ($q_i^0 > 0$), а інші два — до кінцевих частинок ($q_f^0 < 0$).

З даними чотирма частинками можливі наступні реакції:

$$1 + 2 \rightleftharpoons 3 + 4 \quad (1.44)$$

$$1 + \bar{3} \rightleftharpoons \bar{2} + 4 \quad (1.45)$$

$$1 + \bar{4} \rightleftharpoons \bar{2} + 3 \quad (1.46)$$

де цифрами позначені відповідні частинки, а цифрами з рисками — античастинки.

Три вказані реакції називають перехресними каналами однієї узагальненої реакції (див. Розділ 9). Для реакції (1.44) $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2$, $q_3 = -p_3$, $q_4 = -p_4$ і т.д. Наприклад, якщо частинки 1,3 електрони, а 2,4 фотони, то (1.44), (1.46) це електрон-фотонне розсіяння, а реакція (1.45) — електрон-позитронна анігіляція або утворення фотонами електрон-позитронної пари (якщо стрілка в реакції ліворуч).

З чотирьох 4-імпульсів можна утворити лише дві незалежні інваріантні величини. По-перше, рівність (1.43) зводить кількість незалежних параметрів до трьох. По-друге, з трьох величин, наприклад q_1, q_2, q_3 , можна утворити шість інваріантів з числа яких q_1^2, q_2^2, q_3^2 дорівнюють квадратам мас частинок, а інші (q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3) пов'язані умовою

$$(q_1 + q_2 + q_3)^2 = q_4^2 = m_4^2. \quad (1.47)$$

В якості інваріантних параметрів, керуючись зручністю викори-

стання, вибирають не два, а три параметри

$$s = (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2; \quad (1.48)$$

$$t = (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2; \quad (1.49)$$

$$u = (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2; \quad (1.50)$$

що пов'язані між собою співвідношенням

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (1.51)$$

Параметр s має простий фізичний зміст для реакції (1.44) в системі центру інерції, в якій

$$\begin{aligned} q_1 = p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \quad q_2 = p_2 = (E_2, -\vec{p}_1), \\ q_3 = -p_3 = (-E_3, -\vec{p}_3), \quad q_4 = -p_4 = (-E_4, \vec{p}_3). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Тобто s є квадратом повної енергії початкових або кінцевих частинок в реакції $s = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2$. Аналогічний зміст мають параметри t, u для реакцій (1.45) та (1.46) відповідно. У зв'язку з цим реакції (1.44) – (1.46) називають реакціями s, t та u типу відповідно.

Повернемося тепер до виразу для перерізу розсіяння в системі центру інерції у випадку, коли тип частинок при взаємодії не змінюється (1.38) (тобто нехай $m_1 = m_3, m_2 = m_4$, відповідно $E_1 = E_3, E_2 = E_4$) і спробуємо записати вираз для перерізу в інваріантному вигляді.

В означенні (1.38) величина $|M_{fi}|^2$ є інваріантом при перетвореннях Лоренца, а кутова частина $d\Omega_3$ буде змінюватися при переході від однієї системи відліку до іншої. Щоб коректно записати кутову частину використаємо означення

$$\begin{aligned} t = (q_1 + q_3)^2 = / (1.52) / = (p_1 - p_3)^2 = \\ = m_1^2 + m_2^2 - 2E_1^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.53)$$

де θ – кут між векторами \vec{p}_1 та \vec{p}_3 (в системі центру інерції модулі імпульсів рівні $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$). Вважаючи, що енергії початкових частинок фіксовані, отримуємо

$$dt = 2|\vec{p}_1|^2 d(\cos \theta), \quad (1.54)$$

тобто

$$d\Omega_3 = \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\vec{p}_1|^2}. \quad (1.55)$$

Підставимо останній вираз в (1.38) та отримаємо диференційний переріз розсіяння в інваріантній формі до перетворень Лоренца, що не змінюють напрямок відносного руху частинок¹

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|M_{fi}|^2}{2|\vec{p}_1|^2 E^2} d\varphi d(-t) = \frac{1}{64\pi} \frac{|M_{fi}|^2}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t), \quad (1.56)$$

де ми використали (1.33).

На завершення відмітимо, що величину I можна також записати через кінематичні інваріанти

$$I^2 = [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]/4, \quad \text{де } s = (p_1 + p_2)^2. \quad (1.57)$$

У випадку взаємодії частинок з однаковими масами m маємо

$$I^2 = s[s - 4m^2]/4. \quad (1.58)$$

Завдання

1. Безпосередньо перевірити розмірність величини $d\Gamma_{i \rightarrow f}$ в виразах (1.10), (1.22).
2. Проаналізувати значення функції $S(M, m_3, m_4)$ (1.13) в залежності від безрозмірних параметрів $\alpha = m_3/M$ та $\beta = m_4/M$. Отримати вирази для енергій частинок, що розлітаються.
3. Визначити повний переріз пружного розсіяння частинок від абсолютно твердої важкої кулі радіуса R .
4. Визначити повний переріз розсіяння електронів на важкій зарядженій зарядом Q кулі радіуса R .
5. Показати, що в системі центру інерції виконується співвідношення (1.33).
6. Показати, що в системі центру інерції у випадку, коли в результаті взаємодії тип частинок не змінився (не змінилися їх маси), модулі імпульсів частинок до та після реакції не змінилися.
7. Довести справедливність виразу (1.57).

¹При таких перетвореннях величина $d\varphi$ не змінюється.

РОЗДІЛ 2

Загальні питання обрахунку $|M_{fi}|^2$

Для обрахунку фізичноспостережуваних величин таких як ймовірності розпаду, або перерізу розсіяння частинок, виникає потреба знаходження квадрата модуля амплітуди розсіяння $|M_{fi}|^2$ (див. (I.1.43)). При цьому потрібно знаходити квадрати модулів скалярів типу $\bar{v}_1 Q v_2$, де Q — певна комбінація γ -матриць, а v — одночастинкові розв'язки, визначені в (I.2.7). Покажемо як це зробити.

$$|\bar{v}_1 Q v_2|^2 = (\bar{v}_1 Q v_2)(\bar{v}_1 Q v_2)^* = (\bar{v}_1 Q v_2)(\bar{v}_1 Q v_2)^+, \quad (2.1)$$

де остання рівність справедлива оскільки операція ермітового спряження включає в себе транспонування та комплексне спряження, а операція транспонування не змінює скалярну величину. Врахуємо, що

$$\begin{aligned} (\bar{v}_1 Q v_2)^* &= (\bar{v}_1 Q v_2)^+ = v_2^+ Q^+ \bar{v}_1^+ = \\ &= / \bar{v} = v^+ \gamma^0; \quad \gamma^0 \gamma^0 = I; \quad \gamma^{0+} = \gamma^0 / = \\ &= (v_2^+ \gamma^0) \gamma^0 Q^+ \gamma^0 v_1 = \bar{v}_2 \gamma^0 Q^+ \gamma^0 v_1 = \bar{v}_2 \bar{Q} v_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$ — діраковськи-спряжена матриця Q . Тоді

$$|\bar{v}_1 Q v_2|^2 = (\bar{v}_1 Q v_2)(\bar{v}_2 \bar{Q} v_1). \quad (2.3)$$

Використавши (D5.2) легко перекоонатися у справедливості наступних корисних співвідношень:

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu; \quad \bar{\gamma}^5 = -\gamma^5; \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^5} = \gamma^\mu \gamma^5; \quad \bar{\not{a}} = \not{a}^*; \quad \overline{\not{a} \not{b}} = \not{b}^* \not{a}^*; \quad \overline{\not{a} \not{b} \not{c}} = \not{c}^* \not{b}^* \not{a}^*. \quad (2.4)$$

Властивості добутків γ -матриць

Наведемо основні властивості добутків γ -матриць, що нам знадобляться при розрахунку $|M_{fi}|^2$.

Можна показати, що результатом підсумовування по індексу, що повторюється (μ), в наступних комбінаціях γ -матриць є

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I; \quad (2.5)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu; \quad (2.6)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu = 4g^{\lambda\nu} I; \quad (2.7)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda; \quad (2.8)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = 2(\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma). \quad (2.9)$$

Де перший вираз явно випливає з (D5.2). А для доведення справедливості наступних виразів потрібно, використовуючи (D5.2), крайню праву матрицю γ^μ пересунути до крайньої лівої матриці γ_μ .

Домноживши (D5.2) на компоненти $a_\mu b_\nu$ довільних 4-векторів та підсумувавши по μ, ν , отримаємо

$$\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = ab, \quad (2.10)$$

а якщо $a = b$, то

$$\not{a} \not{a} = a^2. \quad (2.11)$$

Домноживши (2.6) – (2.9) на відповідні компоненти 4-векторів та підсумувавши по їх індексам, отримаємо

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2 \not{a}; \quad (2.12)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4ab; \quad (2.13)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}; \quad (2.14)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu = 2(\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}). \quad (2.15)$$

Техніка обрахунку згорток

Рівняння Дірака (D5.1) є інваріантним відносно перетворень (D5.9), тому фізичні результати, що можна отримати базуючись на рівнянні Дірака повинні також виражатися через величини інваріантні відносно перетворень (D5.9). Такими інваріантами є зокрема згортки γ -матриць. Тому не дивно, що, при обрахунку фізичних величин в КЕД,

нам в подальшому знадобиться їх обраховувати. Покажемо як це робити.

По-перше згортка від добутку γ -матриць утворює, завдяки властивостям згорток, симетричний відносно циклічних перестановок тензор

$$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = 1/4Tr[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n}]. \quad (2.16)$$

Під знаком згортки знаходяться γ -матриці, що не змінюються при переході до довільної системи відліку. Отже, такою властивістю повинен володіти й тензор $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$. Тоді він повинен виражатися лише через метричний тензор $g^{\mu\nu}$, що має відповідні властивості.

Оскільки за допомогою метричного тензору можна виразити лише тензор парного рангу, то згортка від добутку непарного числа γ -матриць повинна дорівнювати нулеві (див. також властивості алгебри Дірака на стор. 113):

$$Tr[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0. \quad (2.17)$$

Справедливість останнього твердження, до речі, можна показати й явно за допомогою матриці γ^5 . Так, наприклад, в найпростішому випадку згортки від однієї γ -матриці:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu] &= / \gamma^5 \gamma^5 = 1/ = Tr[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^5] = \\ &= / \gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu / = -Tr[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] = \\ &= / T[ABC] = Tr[CAB] / = -Tr[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] = -Tr[\gamma^\mu] \Rightarrow Tr[\gamma^\mu] = 0. \end{aligned}$$

Взявши згортку від обох частин (D5.2) та врахувавши $Tr[I] = 4$, отримаємо для згортки двох γ -матриць

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Покажемо як знайти згортку чотирьох γ -матриць $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma]$. Для цього використовуючи (D5.2) перемістимо останню γ -матрицю до першої

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma = 2g^{\chi\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\chi \quad (2.19)$$

$$-\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\chi = -2g^{\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\chi + \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\chi \quad (2.20)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\chi = 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\chi - \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \quad (2.21)$$

та додамо почленно ліві та праві частини виразів (2.19) – (2.21):

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma = 2g^{\chi\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu - 2g^{\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\chi + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\chi - \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi. \quad (2.22)$$

Візьмемо згортку ліворуч та праворуч та врахуємо, що під знаком згортки можна циклічно переставляти множники:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma] &= Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] g^{\chi\sigma} - Tr[\gamma^\mu \gamma^\chi] g^{\nu\sigma} + Tr[\gamma^\nu \gamma^\chi] g^{\mu\sigma} = \\ &= / (2.18) / = 4[g^{\mu\nu} g^{\chi\sigma} - g^{\mu\chi} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\chi}]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отже,

$$T^{\mu\nu\chi\sigma} = g^{\mu\nu} g^{\chi\sigma} - g^{\mu\chi} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\chi}. \quad (2.24)$$

Аналогічним чином можна показати, що

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma \gamma^\eta \gamma^\rho] &= Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma] g^{\eta\rho} - Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\eta] g^{\sigma\rho} \\ &+ Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\eta] g^{\chi\rho} - Tr[\gamma^\mu \gamma^\chi \gamma^\sigma \gamma^\eta] g^{\nu\rho} + Tr[\gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma \gamma^\eta] g^{\mu\rho}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

тобто

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\chi\sigma\eta\rho} &= T^{\mu\nu\chi\sigma} g^{\eta\rho} - T^{\mu\nu\chi\eta} g^{\sigma\rho} + T^{\mu\nu\sigma\eta} g^{\chi\rho} - T^{\mu\chi\sigma\eta} g^{\nu\rho} + T^{\nu\chi\sigma\eta} g^{\mu\rho} = \\ &= g^{\mu\nu} g^{\chi\sigma} g^{\eta\rho} - g^{\mu\chi} g^{\nu\sigma} g^{\eta\rho} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\chi} g^{\eta\rho} - g^{\mu\nu} g^{\chi\eta} g^{\sigma\rho} + g^{\mu\chi} g^{\nu\eta} g^{\sigma\rho} - \\ &- g^{\mu\eta} g^{\nu\chi} g^{\sigma\rho} + g^{\mu\nu} g^{\sigma\eta} g^{\chi\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\eta} g^{\chi\rho} + g^{\mu\eta} g^{\nu\sigma} g^{\chi\rho} - g^{\mu\chi} g^{\sigma\eta} g^{\nu\rho} + \\ &+ g^{\mu\sigma} g^{\chi\eta} g^{\nu\rho} - g^{\mu\eta} g^{\chi\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\nu\chi} g^{\sigma\eta} g^{\mu\rho} - g^{\nu\sigma} g^{\chi\eta} g^{\mu\rho} + g^{\nu\eta} g^{\chi\sigma} g^{\mu\rho}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Відмітимо, що за такою процедурою можна знайти згортку від добутку довільної парної кількості γ -матриць.

В загальному випадку, можна показати, що

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sum (-1)^N g^{ab} g^{cd} \dots, \quad (2.27)$$

де a, b, c, d, \dots деяка комбінація індексів $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$, а сума береться по всім можливим комбінаціям пар чисел a, b, c, d, \dots ; N — число перестановок, що переводить послідовність чисел $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ в a, b, c, d, \dots . Число доданків в сумі (2.27) дорівнює $(n-1)!!$

Відмітимо, що для визначення знаку перед окремим доданком існує альтернативна графічна процедура. Слід на колі проставити точки μ_i в такому порядку як в лівій частині (2.27), а потім з'єднати

попарно лініями ті точки, що належать до одного метричного тензора g в доданку, що розглядається. Тоді знак перед доданком буде $(-1)^N$, де N — кількість точок перетину ліній.

На завершення наведемо властивості згортки з матрицею γ^5 (D5.4):

$$\text{Tr}[\gamma^5] = 0, \quad (2.28)$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \quad (2.29)$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda] = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}, \quad (2.30)$$

де $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — повністю антисиметричний тензор 4-го рангу, що змінює знак при перестановці сусідніх двох індексів ($\epsilon^{0123} = 1$, $\epsilon_{0123} = -1$) й дорівнює нулеві, якщо хоча б два його індекси співпадають. Оскільки γ^5 являє собою добуток чотирьох γ -матриць, то згортка від добутку γ^5 на непарну кількість γ -матриць дорівнює нулеві.

Завдання

1. Переконайтеся у справедливості (2.4).
2. Переконайтеся у справедливості (2.5) – (2.9).
3. Знайдіть $T^{\mu\nu\chi\sigma\eta\rho\delta\xi}$.
4. Переконайтеся у справедливості (2.28) – (2.30).

РОЗДІЛ 3

Кулонівське розсіяння

Проведемо розрахунок перерізу розсіяння електрона на важкому ядрі з додатнім зарядом Ze в системі відліку, де ядро нерухоме (система центру інерції). Цей процес є найпростішим в тому сенсі, що добре описується вже в першому порядку по теорії збурень. Згідно визначень (I.1.40), (1.39) та виразу для S -матриці в першому незникаючому наближенні (I.10.13), амплітуда розсіяння має вигляд

$$M_{fi} = -Ze^2 \cdot \frac{\bar{v}_2 \gamma^0 v_1}{\bar{q}^2}, \quad (3.1)$$

де $\bar{q}^2 = 4\vec{p}_1^2 \sin^2(\theta/2)$ — квадрат переданого імпульсу електрону (I.10.12). Відповідно, використавши (2.3), (2.4), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} &= (\bar{v}_{2\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^0 v_{1\beta})(\bar{v}_{1\chi} \gamma_{\chi\xi}^0 v_{2\xi}) = \gamma_{\alpha\beta}^0 v_{1\beta} \bar{v}_{1\chi} \gamma_{\chi\xi}^0 v_{2\xi} \bar{v}_{2\alpha} = \\ &= /u_{i,\alpha} \bar{u}_{i,\beta} = (\rho_i)_{\alpha\beta} \text{ (I.4.9)} / = \gamma_{\alpha\beta}^0 \rho_{1\beta\chi} \gamma_{\chi\xi}^0 \rho_{2\xi\alpha} = Tr[\gamma^0 \rho_1 \gamma^0 \rho_2]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Розглянемо найбільш простий випадок розсіяння неполяризованого електрона у випадку, коли значення його кінцевої поляризації не фіксується. Це означає, що (3.2) потрібно усереднити по початковій спіральності електрона μ_1 та підсумувати по всім можливим спіральним станам його кінцевого стану μ_2 , тобто

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} |M_{fi}|^2. \quad (3.3)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{Z^2 e^4} &= /(\text{I.4.9}) / = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} Tr[\gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_1 \gamma^5 \chi_1)(m + \not{p}_1)] \gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_2 \gamma^5 \chi_2)(m + \not{p}_2)]] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} Tr[\gamma^0(m + \not{p}_1)\gamma^0(m + \not{p}_2)] = / (2.17) / = \\
&= \frac{1}{2} m^2 Tr[\gamma^0\gamma^0] + \frac{p_{1\alpha}p_{2\beta}}{2} Tr[\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^0\gamma^\beta] = / (2.23) / = \\
&= 2[m^2g^{00} + p_{1\alpha}p_{2\beta}(g^{0\alpha}g^{0\beta} - g^{00}g^{\alpha\beta} + g^{0\beta}g^{\alpha 0})] = \\
&= 2[m^2 + 2(p_1)_0(p_2)_0 - p_1p_2] = 2[m^2 + (p_1)_0(p_2)_0 + |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta] = \\
&= / (I.10.13), \varepsilon_1 = \varepsilon_2, |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| / = 2[m^2 + \varepsilon_1^2 + \vec{p}_1^2\cos\theta] = \\
&= 4[m^2 + \vec{p}_1^2\cos^2\theta/2] = 4\varepsilon_1^2[1 - \vec{q}^2/4\varepsilon_1^2]. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Переріз розсіяння для неполяризованих частинок отримується згідно (1.42):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M_{fi}|^2}{16\pi^2} = 4(Z\alpha)^2 \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{\vec{q}^4} \left(1 - \frac{\vec{q}^2}{4\varepsilon_1^2}\right), \quad (3.5)$$

де $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ – постійна тонкої структури.

Кутову залежність перерізу розсіяння легко отримати використавши значення квадрата переданого імпульсу електрону (I.10.12) $\vec{q}^2 = 4\vec{p}_1^2 \sin^2(\theta/2)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{\sin^4(\theta/2)} \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{4\vec{p}_1^4} \left(1 - \frac{\vec{p}_1^2}{\varepsilon_1^2} \sin^2(\theta/2)\right). \quad (3.6)$$

В нерелятивістському наближенні $\varepsilon_1 = m$, $\vec{p}_1 = mv_1$, тобто

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{н.р.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез}} \times (1 - v_1^2 \sin^2(\theta/2)), \quad (3.7)$$

де $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Рез}}$ є перерізом Резерфордівського розсіяння²

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез}} = \left(\frac{Z\alpha}{2mv_1^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (3.8)$$

²Формула для розсіяння нерелятивістських заряджених частинок, що взаємодіють по закону Кулона, була отримана Є. Резерфордом в 1911 р. в рамках класичної механіки та, в системі центру інерції, має вигляд $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$. Вираз був використаний для інтерпретація результатів розсіяння α -частинок на тонких пластинках золота. Отриманий результат справедливий і в квантовомеханічному підході для розсіяння безспінових частинок (див. [8], §135).

Як можна побачити, вираз для розсіяння електрона в кулонівському полі важкого ядра в нерелятивістському наближенні дещо, хоча й не сильно ($v_1^2 \ll 1$), відрізняється від виразу для Резерфордівського розсіяння. Цей факт пов'язаний з тим, що електрон має спін $s = 1/2$. В результаті вираз (3.5), що був отриманий в першому порядку теорії збурень, справедливий в області застосування борнівського наближення $Z\alpha/v_1 \ll 1$ (див. [8], §126), тобто при не дуже малих швидкостях. А умова застосування напівкласичного наближення для процесів в кулоновому полі має протилежний вигляд $Z\alpha/v_1 \gg 1$ (див. [8], §127), тобто виконується для малих швидкостей. Тому перехід до класичного випадку в (3.5) неможливий.

Особливістю поведінки перерізу розсіяння в ультрарелятивістському наближенні ($\vec{p}_1^2 \rightarrow \varepsilon_1^2$) є те, що розсіяння назад ($\theta \rightarrow \pi$) є подавленим, див. Рис. 14.1.

Аналізуючи загальний вираз для перерізу розсіяння (3.6) видно, що як в нерелятивістському так і в ультрарелятивістському наближенні переріз розсіяння швидко спадає зі збільшенням енергії початкового електрона. Тобто, зі збільшенням енергії для досягнення ефектivelyї взаємодії електрон повинен пролітати ближче до важкого ядра, що створює кулонівське поле.

Відмітимо, що повний переріз розсіяння $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega) \sin\theta d\theta d\varphi$ є розбіжною величиною в області малих θ , внаслідок наявності переданого імпульсу електрона в четвертій ступені $\sim \sin^4(\theta/2)$ в знаменнику (3.5).

З класичної теорії кут розсіяння однозначно визначається прицільною відстанню та законом взаємодії (див. [6], §18,19). Для кулонівської взаємодії малим кутам розсіяння відповідає велика прицільна відстань ρ

$$\rho \sim \frac{\alpha}{mv^2} \frac{1}{\theta} \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Користуючись визначенням перерізу розсіяння як ефективної площі в яку повинна потрапити частинка щоб розсіятися (змінити свої характеристики), нескінченність при малих кутах стає зрозумілою.

З цього приводу корисно відмітити, що в історичному досвіді Резерфорда по розсіянню α -частинок на тонких пластинках золота повний переріз розсіяння був скінченний. Справа в тому, що ядро атома золота оточено електронами, що призводять до екранування заряду ядра і, відповід-

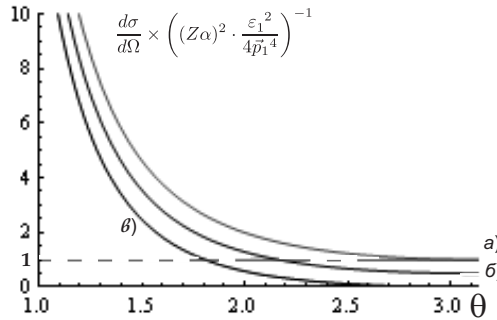


Рис. 0 Кутова частина диференційного перерізу розсіяння електрона в зовнішньому кулоновому полі для великих кутів розсіяння: а) — резерфордівське розсіяння; б) — розсіяння ферміона з $\vec{p}_1^2/\varepsilon_1^2 = 1/2$; в) — розсіяння ферміона з $\vec{p}_1^2/\varepsilon_1^2 = 1$.

но, потенціал ядра має не кулонівський ($A_0^{ext} = \frac{1}{4\pi r}$), а юкавівський вигляд $A_0^{ext} = \frac{e^{-r/a}}{4\pi r}$, де a величина розмірності довжини, що по-порядку дорівнює радіусу атома золота. Тобто у випадку, коли α частинка пролітає від ядра на відстані більшій ніж радіус атома золота, вона практично не взаємодіє з зазначеним ядром.

Цікаво відзначити, що цей історичний дослід, що дав відповідь про структуру атома, був коректно проведений завдяки щасливому випадку, а саме завдяки виконанню наступних умов:

- 1) Ядро атома повинно бути достатньо важким, щоб його можна було вважати нерухомим при взаємодії з α -частинками.
- 2) Швидкість α -частинки, що налітають, не повинна бути дуже великою для того, щоб α -частинка не могла наблизитися до ядра настільки близько, де на неї будуть впливати ядерні сили.

Однак, в наступних дослідях з алюмінієвими мішенями переріз розсіяння вже відрізнявся від резерфордівського.

Розглянемо тепер розсіяння електрона в кулоновому полі важкого ядра з визначеною спіральністю μ_1 , якщо в кінцевому стані спіральність буде μ_2 . При цьому, згідно (3.2), (I.4.9) маємо

$$\bar{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = \text{Tr}[\gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_1 \gamma^5 \not{\chi}_1)(m + \not{p}_1)] \gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_2 \gamma^5 \not{\chi}_2)(m + \not{p}_2)]] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tilde{q}^4}{2} \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} + \frac{\mu_1}{4} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1(m + \not{p}_1) \gamma^0(m + \not{p}_2)] + \\
&\quad + \frac{\mu_2}{4} Tr[\gamma^0(m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2(m + \not{p}_2)] + \\
&\quad + \frac{\mu_1 \mu_2}{4} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1(m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2(m + \not{p}_2)]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Розглянемо по черзі окремі доданки

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1(m + \not{p}_1) \gamma^0(m + \not{p}_2)] &= m \chi_{1\mu} p_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] + \\
&\quad + m \chi_{1\mu} p_{1\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0] = /(2.30)/ = 0. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^0(m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2(m + \not{p}_2)] &= Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_2(m + \not{p}_2) \gamma^0(m + \not{p}_1)] = \\
&= m \chi_{2\mu} p_{1\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] + m \chi_{2\mu} p_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0] = 0. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1(m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2(m + \not{p}_2)] &= m^2 \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu] + \\
+ \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\beta] &= /[\gamma^5, \gamma^\mu]_- = 0, \gamma^5 \gamma^5 = \hat{1} = \\
&= m^2 \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] - \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} Tr[\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^\beta] = \\
&= /(2.24), (2.26), (D5.1.14)/ = 4[m^2(2\chi_1^0 \chi_2^0 - \chi_1 \chi_2) + \\
+ 2(\chi_2 p_1) \chi_1^0 p_2^0 + 2(\chi_1 p_2) \chi_2^0 p_1^0 - 2(\chi_1 \chi_2) p_1^0 p_2^0 - 2(p_1 p_2) \chi_1^0 \chi_2^0 + \\
&\quad + (\chi_1 \chi_2)(p_1 p_2) - (\chi_1 p_2)(\chi_2 p_1)]. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Використаємо явний вигляд 4-векторів поляризації (D5.1.21) та врахуємо, що згідно (I.10.13) імпульс електрона після розсіяння змінює лише свій напрямок, тобто $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\vec{p}_1 \vec{p}_2 = \vec{p}_1^2 \cos \theta$. Тоді останній вираз можна записати як

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1(m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2(m + \not{p}_2)] = \\
&= (\vec{p}_1^2 + \varepsilon_1^2 \cos \theta) + 2 \cdot 2 \frac{\vec{p}_1^2 \varepsilon_1^2}{m^2} (1 - \cos \theta) - \\
&\quad - 2 \frac{\varepsilon_1^2}{m^2} (\vec{p}_1^2 - \varepsilon_1^2 \cos \theta) - 2 \frac{\vec{p}_1^2}{m^2} (\varepsilon_1^2 - \vec{p}_1^2 \cos \theta) + \\
&\quad + \frac{1}{m^2} (\vec{p}_1^2 - \varepsilon_1^2 \cos \theta) (\varepsilon_1^2 - \vec{p}_1^2 \cos \theta) - \frac{\vec{p}_1^2 \varepsilon_1^2}{m^2} (1 - \cos \theta)^2 = \\
&= 2\varepsilon_1^2 - 2(m^2 + \varepsilon_1^2) \sin^2(\theta/2). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Підставивши (3.11) – (3.14) в (3.10) та (1.42) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{(Z\alpha)^2}{16\vec{p}_1^4 \sin^4(\theta/2)} \times \\ &\times (2m^2 + 2\vec{p}_1^2 \cos^2 \theta/2 + \mu_1\mu_2[2\varepsilon_1^2 - 2(m^2 + \varepsilon_1^2) \sin^2(\theta/2)]) = \\ &= \frac{(Z\alpha)^2}{\sin^4(\theta/2)} \cdot \frac{\varepsilon_1^2}{4\vec{p}_1^4} \cdot \begin{cases} \cos^2(\theta/2), & \mu_1\mu_2 = +1 \\ (m/\varepsilon_1)^2 \sin^2(\theta/2), & \mu_1\mu_2 = -1 \end{cases} \quad (3.15) \end{aligned}$$

В якості перевірки, зробимо усереднення цього виразу по спіральностям

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\mu_1 \cdot \mu_2 = -1, 1} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Як легко побачити, результат усереднення співпадає з (3.6).

Проаналізуємо отриманий вираз (3.15). По-перше, оскільки залежність від спіральностей електронів є пропорційною $\mu_1\mu_2$, то після підсумовування по одній зі спіральностей (початкового чи кінцевого електрона) інформація про іншу спіральність втрачається. Або, електрон в кінцевому стані може мати певну спіральність лише, якщо він має певну спіральність в початковому стані, та навпаки.

При русі електрона в центральному полі зберігається повний кутовий момент частинки. В граничному випадку, коли початковий електрон летить прямо на ядро (нульова прицільна відстань), його орбітальний момент дорівнює нулеві й повний момент є спіном електрона. Очевидно, що після взаємодії електрон повинен змінити напрямку руху на протилежний. Виберемо систему відліку, в якій вісь z направлена вздовж напрямку руху початкового електрона. Нехай також початковий електрон має певну проекцію спіну на вісь z . Тоді після розсіяння проекція повного моменту (спіну) на вісь z повинна залишитись незмінною, а проекція спіну на напрямку руху (спіральність) повинна змінитися на протилежну. Відповідно, ймовірність розсіяння на кут $\theta = \pi$ у випадку, коли $\mu_1\mu_2 = +1$ повинна дорівнювати нулеві, що й забезпечується множителем $\cos^2(\theta/2)$ в (3.15).

Як видно з (3.15), в нерелятивістському наближенні спіральність електрона при розсіянні в кулоновому полі може змінюватись (див. Рис. 14.2), однак в ультрарелятивістському наближенні спіральність

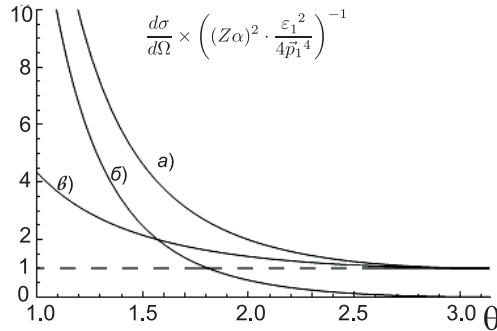


Рис. 0 Кутова частина диференційного перерізу розсіяння нерелятивістського електрона в зовнішньому кулоновому полі для великих кутів розсіяння: *а*) — резерфордівське розсіяння; *б*) — розсіяння ферміона без зміни поляризації ($\mu_1\mu_2 = +1$); *в*) — зі зміною поляризації ($\mu_1\mu_2 = -1$).

зберігається¹.

Останнє твердження пояснюється тим, що в ультрарелятивістському наближенні $\varepsilon^2 \simeq \vec{p}^2$ і можна вважати, що частинки є безмасовими. Для безмасових частинок, як відомо, поняття спіральності та кіральності співпадають (див. Додаток D2.4). А для безмасових частинок кіральність є лоренц-інваріантною величиною та інтегралом руху. До речі, перехід до кірального представлення для безмасових ферміонів в ультрарелятивістському наближенні значно спрощує розрахунки і є загальноповживаним.

Для прикладу припустимо, що початковий електрон має спіральність $\mu_1 = -1$, тоді в ультрарелятивістському наближенні $m = 0$ і електрон має ліву кіральність, тобто $v_1 \rightarrow \hat{P}_- v_1 / m=0$, де $\hat{P}_- = (1 - \gamma^5)/2$ — проєктуючий оператор на стан з лівою кіральністю (D5.2.2). Аналізуючи вираз для амплітуди (3.1) видно, що, згідно (D5.2.12), в кінцевому стані кіральність електрона може бути лише лівою, що й узгоджується з випадком $\mu_1\mu_2 = +1$ в (3.15).

Отже, навіть не проводячи подальших розрахунків, видно, що в ультрарелятивістському наближенні введення кіральних операторів автоматично забезпечує заборону процесів, в яких в результаті ку-

¹Ймовірність для ультрарелятивістського процесу зі зміною спіральності $\mu_1\mu_2 = -1$ прямує до нуля за рахунок множника $(m/\varepsilon_1)^2 \rightarrow 0$ в (3.15).

лонівського розсіяння спіральність електрона змінює свій знак.

Розрахуємо в цьому наближенні переріз розсіяння для початкового електрона з лівою кіральністю. Згідно (3.1), (D5.2.14) запишемо амплітуду як

$$M_{fi} = \frac{Ze^2}{2\vec{q}^2} \cdot \bar{v}_2 \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_1, \quad (3.16)$$

Тоді, по аналогії з (3.2), отримаємо

$$4\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = Tr[\gamma^0 (1 - \gamma^5) \rho_1 \gamma^0 (1 - \gamma^5) \rho_2]. \quad (3.17)$$

В останньому виразі, для спрощення розрахунків, замість матриці густини ρ_i можна використовувати підсумовану по спіральностям матрицю густини (I.4.9):

$$\sum_{\mu=\pm 1} \rho_i = \sum_{\mu=\pm 1} \frac{1}{2} [(1 + \mu \gamma^5 \not{\chi})(m + \not{p}_i)] = (m + \not{p}_i)|_{m=0} = \not{p}_i. \quad (3.18)$$

Це пов'язано з тим, що хоча в масивному випадку дія оператора проєктування \hat{P}_- на ферміонну функцію з різними значеннями спіральності ($\mu = \pm 1$) не дорівнює нулеві, при переході до ультрарелятивістського випадку ($m \rightarrow 0$) оператор проєктування \hat{P}_- автоматично "вириже" потрібну частину матриці густини.

Отже, замість (3.17), можна записати

$$4\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = Tr[\gamma^0 (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^0 (1 - \gamma^5) \not{p}_2] = Tr[\gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 \not{p}_2] + Tr[\gamma^0 \gamma^5 \not{p}_1 \gamma^0 \gamma^5 \not{p}_2] - Tr[\gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 \gamma^5 \not{p}_2] - Tr[\gamma^0 \gamma^5 \not{p}_1 \gamma^0 \not{p}_2]. \quad (3.19)$$

Згортка від останніх двох доданків дає нуль згідно (2.30), а в першому доданку в другій стрічці (3.20) можна взагалі позбавитися матриць γ^5 , якщо одну з них перемістити до іншої, враховуючи, що матриця γ^5 антикомутує з усіма матрицями γ^μ . Тоді отримаємо

$$4\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = 2Tr[\gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 \not{p}_2] = 2p_{1,\alpha} p_{2,\beta} Tr[\gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta] = /(2.24)/ = 8p_{1,\alpha} p_{2,\beta} (g^{0\alpha} g^{0\beta} - g^{00} g^{\alpha\beta} + g^{0\beta} g^{0\alpha}) = 8[p_1^0 p_2^0 - (p_1, p_2)]. \quad (3.20)$$

Враховуючи, що енергія електрона при кулонівському розсіянні не змінюється та те, що в ультрарелятивістському наближенні $\varepsilon = |\vec{p}|$, маємо $p_1 = \varepsilon(1, \vec{p}_1/|\vec{p}_1|)$; $p_2 = \varepsilon(1, \vec{p}_2/|\vec{p}_2|)$ та

$$\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = 2[2\varepsilon^2 - \varepsilon^2(1 - \cos\theta)] = 4\varepsilon^2 \cos^2(\theta/2). \quad (3.21)$$

Згідно (1.42) отримуємо переріз розсіяння

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2 \cos^2(\theta/2)}{\varepsilon^2 4 \sin^4(\theta/2)}, \quad (3.22)$$

що співпадає в ультрарелятивістському наближенні з отриманим раніше виразом (3.15) у випадку, коли спіральність електрона після розсіяння не змінюється ($\mu_1\mu_2 = +1$).

Таким чином ми явно переконалися, що перехід до кирального представлення для безмасових ферміонів в ультрарелятивістському наближенні значно спрощує розрахунки при дослідженні реакцій з поляризованими частинками.

Завдання

1. Як зміниться матриця густини (3.18) у випадку кулонівського розсіяння ультрарелятивістського позитрона з певним значенням спіральності.

РОЗДІЛ 4

Електрон-електронне розсіяння

Для знаходження диференційного перерізу електрон-електронного розсіяння (1.38) необхідно розрахувати величину $|M_{fi}|^2$. Згідно означень (I.1.34), (I.1.40) та виразу для матриці електрон-електронного розсіяння в другому порядку теорії збурень (I.2.46), амплітуда електрон-електронного розсіяння

$$M_{fi} = e^2 \left[\frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)}{(p_1 - p_4)^2} - \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)}{(p_1 - p_3)^2} \right]. \quad (4.1)$$

Для знаходження $|M_{fi}|^2$ використаємо (2.3), (2.4) та визначення кінематичних інваріантів (1.48) для випадку (1.52):

$$\begin{aligned} \frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \left[\frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)}{u} - \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)}{t} \right] \times \\ &\times \left[\frac{(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4)}{u} - \frac{(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3)}{t} \right] = \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$= \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3)}{t^2} + \quad (4.3)$$

$$+ \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4)}{u^2} - \quad (4.4)$$

$$- \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4)}{tu} - \quad (4.5)$$

$$- \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3)}{ut}. \quad (4.6)$$

Легко побачити, що вирази (4.4), (4.6) відрізняються від виразів (4.3) та (4.5) заміною індексів $3 \leftrightarrow 4$ відповідно. Тому, для спрощення, запишемо квадрат амплітуди $e - e$ розсіяння у вигляді

$$\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = \frac{A}{t^2} + \frac{A_{3 \leftrightarrow 4}}{u^2} - \frac{B}{tu} - \frac{B_{3 \leftrightarrow 4}}{ut}, \quad (4.7)$$

де

$$A = (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1) (\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4) (\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3), \quad (4.8)$$

$$B = (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1) (\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3) (\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4). \quad (4.9)$$

Вкажемо явно внутрішні індекси підсумовування, що дозволить переставити множники в необхідному порядку та записати вирази для A, B у вигляді згорток від добутків матриць:

$$\begin{aligned} A &= (\bar{v}_{4\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu v_{2\beta}) (\bar{v}_{3\delta} (\gamma_\mu)_{\delta\eta} v_{1\eta}) (\bar{v}_{2\lambda} \gamma_{\lambda\xi}^\nu v_{4\xi}) (\bar{v}_{1\rho} (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} v_{3\sigma}) = \\ &= (\gamma_{\alpha\beta}^\mu v_{2\beta} \bar{v}_{2\lambda} \gamma_{\lambda\xi}^\nu v_{4\xi} \bar{v}_{4\alpha}) ((\gamma_\mu)_{\delta\eta} v_{1\eta} \bar{v}_{1\rho} (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} v_{3\sigma} \bar{v}_{3\delta}) = \\ &= /u_{i,\alpha} \bar{u}_{i,\beta} = (\rho_i)_{\alpha\beta} \text{ (I.4.9)} / = \text{Tr}[\gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_4] \cdot \text{Tr}[\gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu \rho_3]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} B &= (\bar{v}_{4\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu v_{2\beta}) (\bar{v}_{3\delta} (\gamma_\mu)_{\delta\eta} v_{1\eta}) (\bar{v}_{2\lambda} \gamma_{\lambda\xi}^\nu v_{3\xi}) (\bar{v}_{1\rho} (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} v_{4\sigma}) = \\ &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu v_{2\beta} \bar{v}_{2\lambda} \gamma_{\lambda\xi}^\nu v_{3\xi} \bar{v}_{3\delta} (\gamma_\mu)_{\delta\eta} v_{1\eta} \bar{v}_{1\rho} (\gamma_\nu)_{\rho\sigma} v_{4\sigma} \bar{v}_{4\alpha} = \\ &= \text{Tr}[\gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_3 \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu \rho_4] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Надалі будемо розглядати найбільш простий випадок розсіяння неполяризованих електронів, у випадку коли значення кінцевої поляризації не фіксується. Це означає, що (4.2) потрібно усереднити по початковим спіральностям μ_1, μ_2 та підсумувати по всім можливим спіральностям кінцевих частинок μ_3, μ_4 , тобто треба

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \sum_{\mu_3, \mu_4} \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \frac{1}{2} \sum_{\mu_2} |M_{fi}|^2. \quad (4.12)$$

Оскільки поляризаційні властивості окремої частинки у виразі для квадрату амплітуди розсіяння явно входять лише в матрицю густини ρ , а сума по можливим спіральним станам в матриці густини згідно визначення (I.4.9):

$$\sum_{\mu=\pm 1} \rho_{qi} = \sum_{\mu=\pm 1} \frac{q}{2} [(1 + \mu \gamma^5 \chi)(m + q \not{p}_i)] = q(m + q \not{p}_i) = \bar{\rho}_{qi}, \quad (4.13)$$

де $q = 1$ відповідає частинці, а $q = -1$ античастинці, то процедура усереднення по спіральним станам зводиться до заміни

$$\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} \rightarrow \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{e^4} = \frac{1}{4} \left[\frac{\bar{A}}{t^2} + \frac{\bar{A}_{3 \leftrightarrow 4}}{u^2} - \frac{\bar{B}}{ut} - \frac{\bar{B}_{3 \leftrightarrow 4}}{ut} \right], \quad (4.14)$$

де вирази \bar{A}, \bar{B} відрізняються від A, B заміною $\rho_i \rightarrow \bar{\rho}_i$.

Знайдемо значення \bar{A}

$$\bar{A} = Tr[\gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_4)] \cdot Tr[\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_3)]. \quad (4.15)$$

Перший множник знаходиться як

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_4)] &= \\ &= Tr[m^2\gamma^\mu\gamma^\nu + mp_{2\alpha}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu + mp_{4\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\beta + p_{2\alpha}p_{4\beta}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] = \\ &= /(2.17)/ = m^2Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] + p_{2\alpha}p_{4\beta}Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] = /(2.18), (2.24)/ = \\ &= 4[m^2g^{\mu\nu} + p_{2\alpha}p_{4\beta}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})] = \\ &= 4[m^2g^{\mu\nu} + p_2^\mu p_4^\nu - g^{\mu\nu}(p_2p_4) + p_2^\nu p_4^\mu], \quad (4.16) \end{aligned}$$

а другий отримується з (4.16) заміною $2 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ та опусканням індексів

$$Tr[\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_3)] = 4[m^2g_{\mu\nu} + p_{1,\mu}p_{3,\nu} - g_{\mu\nu}(p_1p_3) + p_{1,\nu}p_{3,\mu}]. \quad (4.17)$$

Підставивши вирази (4.16), (4.17) в (4.15) та врахувавши, що $\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$, отримаємо усереднений по спіральним станам вираз (4.3):

$$\bar{A} = 32[2m^4 - m^2\{(p_2p_4) + (p_1p_3)\} + (p_1p_2)(p_3p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3)]. \quad (4.18)$$

Знайдемо \bar{B}

$$\bar{B} = Tr \left[\underline{\gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_3)\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_4)} \right]. \quad (4.19)$$

Для спрощення обрахунку (4.19) спочатку розглянемо його підкреслену частину

$$\begin{aligned} \gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_3)\gamma_\mu &= m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu + mp_{3,\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu + \\ &+ mp_{2,\lambda}\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\mu + p_{2,\lambda}p_{3,\rho}\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = /(2.6) - (2.8)/ = \\ &= -2m^2\gamma^\nu + 4m(p_3^\nu + p_2^\nu) - 2\not{p}_3\gamma^\nu\not{p}_2. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Підставивши (4.20) в (4.19) та знехтувавши доданками, що містять непарну кількість γ -матриць (див. (2.17)), отримаємо під знаком згорт-

ки

$$\begin{aligned}
& \gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_3)\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_4) = \\
& = -8m^4 I - 2m^2(\gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_4 + \not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\nu) + \\
& + 4m^2[(\not{p}_3 + \not{p}_2) \not{p}_4 + \not{p}_1(\not{p}_3 + \not{p}_2)] - 2 \not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_4 = \\
& = / (2.6), (2.7) / = -8m^4 I - 8(p_1 p_2) \not{p}_3 \not{p}_4 + \\
& + 4m^2(\not{p}_1 \not{p}_2 + \not{p}_3 \not{p}_1 + \not{p}_3 \not{p}_2 + \not{p}_4 \not{p}_1 + \not{p}_4 \not{p}_2 + \not{p}_4 \not{p}_3). \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Згортку від останнього виразу легко обчислити врахувавши наступні співвідношення: $Tr[I] = 4$, $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$. Остаточо

$$\begin{aligned}
\bar{B} &= 16[-2m^4 - 2(p_1 p_2)(p_3 p_4) + \\
& + m^2\{(p_1 p_2) + (p_3 p_1) + (p_3 p_2) + (p_4 p_1) + (p_4 p_2) + (p_4 p_3)\}]. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Відмітимо, що з явного вигляду \bar{B} випливає $\bar{B} = \bar{B}_{3 \rightarrow 4}$.

Підставивши (4.18), (4.22) в (4.14) отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} &= \frac{2m^4 - m^2\{(p_2 p_4) + (p_1 p_3)\} + (p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3)}{t^2} + \\
& + \frac{2m^4 - m^2\{(p_2 p_3) + (p_1 p_4)\} + (p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)}{u^2} + \\
& + \frac{2m^4 + 2(p_1 p_2)(p_3 p_4)}{tu} - \\
& - \frac{m^2\{(p_1 p_2) + (p_3 p_1) + (p_3 p_2) + (p_4 p_1) + (p_4 p_2) + (p_4 p_3)\}}{tu}. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Наведений вираз можна звести до більш простого вигляду використовуючи закон збереження 4-імпульсу $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ та $p_i^2 = m^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} &= \frac{(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_4)^2 + 2m^2(m^2 - (p_1 p_3))}{(p_1 - p_3)^4} + \\
& + \frac{(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_3)^2 + 2m^2(m^2 - (p_1 p_4))}{(p_1 - p_4)^4} + \\
& + 2 \frac{(p_1 p_2)((p_1 p_2) - 2m^2)}{(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2}, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

а також записати через кінематичні інваріанти

$$\begin{aligned} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{4e^4} = & \frac{1}{t^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \frac{1}{u^2} \left[\frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \\ & + \frac{4}{tu} \left(\frac{s}{2} - m^2 \right) \left(\frac{s}{2} - 3m^2 \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Отже переріз розсіяння неполяризованих електронів, згідно з (1.56) та (1.58), дорівнює

$$\begin{aligned} d\sigma_{i \rightarrow f} = & \frac{1}{64\pi} \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t) = \\ = & 2r_e^2 \left\{ \frac{1}{t^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \frac{1}{u^2} \left[\frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{tu} \left(\frac{s}{2} - m^2 \right) \left(\frac{s}{2} - 3m^2 \right) \right\} \frac{m^2 d\varphi d(-t)}{s[s - 4m^2]}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

де розмірний параметр $r_e = \alpha/m$ отримав назву класичного радіусу електрона (тут $m = m_e$ – маса електрона), а $\alpha = e^2/4\pi$ є постійною тонкої структури. В системі одиниць СІ

$$r_e = \frac{\alpha}{m_e c^2} = 2.818 \cdot 10^{-15} \text{ м}. \quad (4.27)$$

Для кращого розуміння отриманого результату розглянемо часткові випадки.

В системі центру інерції, враховуючи, що маси частинок однакові маємо (див. (1.52)):

$$\begin{aligned} q_1 = p_1 = (\varepsilon, \vec{p}_1), \quad q_2 = p_2 = (\varepsilon, -\vec{p}_1), \\ q_3 = -p_3 = -(\varepsilon, \vec{p}_3), \quad q_4 = -p_4 = -(\varepsilon, -\vec{p}_3), \end{aligned} \quad (4.28)$$

де $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \varepsilon$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = |\vec{p}|$. Тоді (див. Рис. 2.1 на стор. 31) отримуємо:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4\varepsilon^2, \quad (4.29)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2(p_1 p_3) = \\ = 2m^2 - 2(\varepsilon^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta) = -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4.30)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = 2m^2 - 2(\varepsilon^2 - |\vec{p}|^2 \cos(\pi - \theta)) = -4|\vec{p}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (4.31)$$

$$d\varphi d(-t) = 2|\vec{p}|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2|\vec{p}|^2 d\Omega. \quad (4.32)$$

Підставивши (4.29) – (4.32) в (4.26) отримаємо громіздкий вираз, який можна звести до

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \frac{m^2(\varepsilon^2 + \vec{p}^2)^2}{4\vec{p}^4 \varepsilon^2} \left[\frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2 + \vec{p}^2} \right)^2 \left(1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \quad (4.33)$$

В нерелятивістському наближенні, коли $\varepsilon \rightarrow m$, $\vec{p}^2 \rightarrow 0$ маємо

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{4r_e^2}{v^4} \left[\frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} \right] = \\ = \frac{r_e^2}{v^4} \left[\frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} + \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right], \quad (4.34)$$

де $v = 2\vec{p}/m$ відносна швидкість початкових електронів. При цьому швидкість електронів вважається достатньо малою ($v \ll 1$), однак не може прямувати до нуля. Це необхідно для того, щоб виконувалась умова застосовності теорії збурень $\alpha/v \ll 1$ (тобто відносна швидкість початкових електронів повинна бути набагато більшою за $1/137$ швидкості світла $v \gg c/137$), див. [8], §126. В цьому наближенні отриманий нами вираз співпадає з виразом розрахованим в рамках нерелятивістської квантової механіки для розсіяння тотожних частинок в борнівському наближенні, див. [8], §137.

В ультрарелятивістському наближенні, коли $\varepsilon^2 \rightarrow \vec{p}^2$, $m \rightarrow 0$ маємо

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{у.р.}} = r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta} \right] = r_e^2 \frac{m^2}{4\varepsilon^2} \frac{(3 + \cos^2 \theta)^2}{\sin^4 \theta}. \quad (4.35)$$

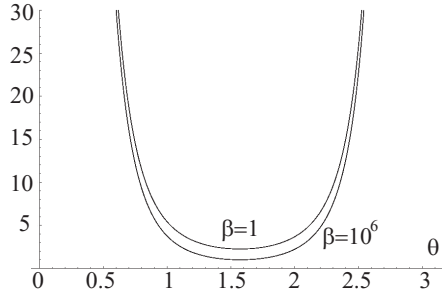


Рис. 0 Кутова частина перерізу електрон-електронного розсіяння в системі центру інерції для різних енергій частинок. По вісі ординат відкладено безрозмірну величину $\frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{4\vec{p}^4 \varepsilon^2}{r_e^2 m^2 (\varepsilon^2 + \vec{p}^2)^2}$, параметр $\beta = \varepsilon^2 / \vec{p}^2$.

Як в нерелятивістському (4.34), так і в ультрарелятивістському (4.35) наближенні переріз розсіяння швидко спадає зі збільшенням енергії електронів. Тобто, зі збільшенням енергії електрони повинні пролітати ближче один до одного для ефективної взаємодії.

Відмітимо, що отриманий вираз (4.33) є симетричним до заміни $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Так і повинно бути, оскільки зазначена заміна рівнозначна заміні місцями кінцевих електронів, що є тотожними частинками (див. Рис. 2.1 на стор. 31).

Звернемо також увагу на той факт, що в області $\theta \rightarrow 0$ ($\theta \rightarrow \pi$) диференційний переріз розсіяння прямує до нескінченності, див. Рис. 15.1, що побудований на основі (4.33). Окрім аргументів наведених в попередньому розділі, слід відзначити, що математично нескінченність в електрон-електронному розсіянні виникає тоді, коли 4-імпульс віртуального фотона виходить на масову поверхню ($q^2 = m_\gamma^2 = 0$).

Як можна побачити з Рис. 15.1, кутова частина диференційного перерізу розсіяння слабо залежить від енергій частинок в області малих кутів.

В лабораторній системі відліку [9], в якій один з електронів (нехай це буде електрон з характеристиками, які ми позначили цифрою 2) спочатку був нерухомим ($E_2 = m$, $\vec{p}_2 = 0$), внаслідок взаємодії змінюються як напрямки, так і величини імпульсів та енергії части-

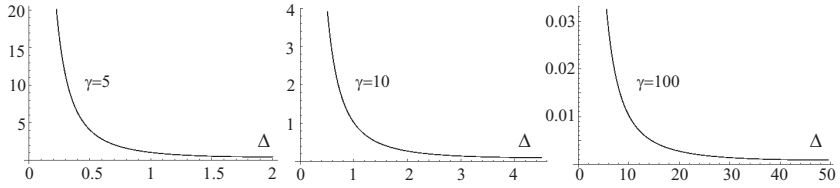


Рис. 0 Обезрозмірений переріз електрон-електронного розсіяння в лабораторній системі відліку для різних енергій частинок. По вісі ординат відкладено $\frac{d\sigma}{d\Delta} \frac{1}{2\pi r_e^2}$, по вісі абсцис параметр Δ в межах $0 < \Delta < (\gamma - 1)/2$.

нок. Тому параметр $d(-t)$, що входить в визначення перерізу розсіяння (1.56), не можна виразити лише через диференціал кута, на який відхилився електрон, що спочатку налітає на нерухомий електрон. Виявляється, що параметр $d(-t)$ можна виразити через зміну безрозмірного параметру

$$\Delta = (E_1 - E_3)/m = (E_4 - E_2)/m = (E_4 - m)/m, \quad (4.36)$$

що виражає передану енергію нерухомому електрону (або зміну енергії електрона, що налітає), а кінематичні інваріанти через параметр Δ та енергію електрона, що налітає:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 p_2) = 2m(m + E_1), \quad (4.37)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 = p_4^2 + p_2^2 - 2(p_4 p_2) = 2m^2 - 2E_4 m = /E_4 = m(\Delta + 1)/ = -2m^2 \Delta, \quad (4.38)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = -2m(E_1 - m - m\Delta) \quad (4.39)$$

$$d\varphi d(-t) = 2m^2 d\varphi d\Delta. \quad (4.40)$$

Підставивши (4.37) – (4.40) в (4.26) та проінтегрувавши по $d\varphi$, отримуємо вираз для перерізу електрон-електронного розсіяння в лабораторній системі відліку:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1} \left[\frac{(\gamma - 1)^2 \gamma^2}{\Delta^2 (\gamma - 1 - \Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\Delta(\gamma - 1 - \Delta)} + 1 \right], \quad (4.41)$$

де введено позначення $\gamma = E_1/m$, а величини $m\Delta = E_4 - m$ та $m(\gamma - 1 - \Delta) = E_3 - m$ виражають кінетичні енергії електронів піс-

ля взаємодії. Тотожність електронів виражається в тому, що в (4.41) зазначені величини входять симетрично.

В граничному випадку $\Delta \rightarrow 0$ диференційний переріз розсіяння також прямує до нескінченності $\sim 1/\Delta^2$, див. Рис. 15.2. Якщо на Рис. 15.2 параметр Δ змінювати в межах $(\gamma - 1)/2 < \Delta < \gamma - 1$, ми отримаємо малюнки дзеркально симетричні до наведених на Рис. 15.2.

Завдання

1. Переконайтеся у справедливості (4.21), (4.22).
2. Переконайтеся у справедливості (4.24), (4.25).
3. Виведіть в загальному випадку зв'язок між прицільною відстанню та кутом розсіяння в класичній теорії.
4. Доведіть справедливість (4.39).
5. Вважаючи електроном віддачі електрон, що після взаємодії має меншу енергію визначити межі в яких змінюється параметр Δ .
6. Показати безпосереднім розрахунком, що в другому порядку теорії збурень переріз розсіяння не зміниться, якщо один з початкових або кінцевих електронів є поляризованим.
7. Що можна сказати, не проводячи розрахунків, про кінцевий спіральний стан ультрарелятивістських електронів, якщо спочатку вони знаходяться в стані а) e_L, e_L б) e_R, e_L в) e_R, e_R .
8. В системі центру інерції отримайте перерізи розсіяння ультрарелятивістських електронів, якщо в початковому стані вони мали а) однакову б) різну спіральність.
9. Користуючись поняттям перехресної інваріантності розгляньте $e - e^+$ розсіяння. Для цього випадку отримайте аналог формул (4.26), (4.33) – (4.35), (4.41). Чи мають вони симетрію до заміни частинок місцями.
10. Поясніть чому в нерелятивістському наближенні вклад від діаграми анігіляційного типу при $e - e^+$ розсіянні зникає.

РОЗДІЛ 5

Електрон-фотонне розсіяння

Для того, щоб знайти диференційний переріз процесу електрон-фотонного розсіяння (1.38) необхідно розрахувати величину $|M_{fi}|^2$. Згідно означень (I.1.34), (I.1.40) та виразу для матриці електрон-фотонного розсіяння в другому порядку теорії збурень (I.4.15), амплітуда електрон-фотонного розсіяння може бути записана у вигляді

$$M_{fi} = e^2 \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \bar{v}_2 \left[\gamma^\nu \frac{m + \not{p}_1 - \not{k}_2}{m^2 - (p_1 - k_2)^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{m + \not{p}_1 + \not{k}_1}{m^2 - (p_1 + k_1)^2} \gamma^\nu \right] v_1. \quad (5.1)$$

Щоб позбавитися громіздких записів, в цьому розділі ми будемо позначати $\epsilon^{\lambda_i}(\vec{k}_i) \equiv \epsilon^{\lambda_i}$.

Отриманий вираз можна суттєво спростити, якщо врахувати, що в нього входить згортка з γ -матрицями 4-імпульсу реального ферміона та його хвильова функція, котрі пов'язані через рівняння Дірака (див., (D5.1.9))

$$(q \not{p} - m)v_{qp} = 0, \quad \bar{v}_{qp}(q \not{p} - m) = 0, \quad q = \pm 1, \quad (5.2)$$

де $q = 1$ (-1) відповідає частинці (античастинці). Тоді,

$$\not{p}_1 \gamma^\mu v_1 = p_{1,\alpha} \gamma^\alpha \gamma^\mu v_1 = /(\text{D5.2})/ = (2p_1^\mu - \gamma^\mu \not{p}_1)v_1 = (2p_1^\mu - m\gamma^\mu)v_1 \quad (5.3)$$

і (5.1) отримує вигляд:

$$M_{fi} = e^2 \epsilon_\nu^{\lambda_1} \epsilon_\mu^{*\lambda_2} \bar{v}_2 \left[\frac{2p_1^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{m^2 - (p_1 - k_2)^2} + \frac{2p_1^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu}{m^2 - (p_1 + k_1)^2} \right] v_1. \quad (5.4)$$

Для знаходження $|M_{fi}|^2$ використаємо (2.3), (2.4) та визначення кінематичних інваріантів (1.48), які для нашого випадку будуть

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k_1)^2 = m^2 + 2(p_1 k_1); \\ t &= (p_1 - p_2)^2 = (k_2 - k_1)^2 = -2(k_1 k_2); \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = m^2 - 2(p_1 k_2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \bar{v}_2 \left[\frac{2(\epsilon^{*\lambda_2} p_1) \not{\epsilon}^{\lambda_1} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2}}{m^2 - u} + \frac{2(\epsilon^{\lambda_1} p_1) \not{\epsilon}^{*\lambda_2} + \not{\epsilon}^{*\lambda_2} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1}}{m^2 - s} \right] v_1 \times \\ &\times \bar{v}_1 \left[\frac{2(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \not{\epsilon}^{*\lambda_1} - \not{\epsilon}^{\lambda_2} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1}}{m^2 - u} + \frac{2(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \not{\epsilon}^{\lambda_2} + \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2}}{m^2 - s} \right] v_2 = \\ &= \frac{1}{(m^2 - u)^2} \left[4(\epsilon^{*\lambda_2} p_1)(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - \right. \\ &- 2(\epsilon^{*\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - 2(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 + \\ &+ \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{(m^2 - s)^2} \left[4(\epsilon^{\lambda_1} p_1)(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + \right. \\ &+ 2(\epsilon^{\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + 2(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + \\ &+ \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{(m^2 - u)(m^2 - s)} \left[4(\epsilon^{*\lambda_2} p_1)(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + \right. \\ &+ 2(\epsilon^{*\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 - 2(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 - \\ &- \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \left[4(\epsilon^{\lambda_1} p_1)(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 + \right. \\ &+ 2(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - 2(\epsilon^{\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - \\ &- \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 \left. \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Доданки, що утворилися мають структуру $\bar{v}_i A v_k \bar{v}_k B v_i$, де A, B деякі матриці розмірності (4×4) . Тоді

$$\bar{v}_{i,\alpha} A_{\alpha\beta} v_{k,\beta} \bar{v}_{k,\gamma} B_{\gamma\delta} v_{i,\delta} = v_{i,\delta} \bar{v}_{i,\alpha} A_{\alpha\beta} v_{k,\beta} \bar{v}_{k,\gamma} B_{\gamma\delta} = \text{Tr}[\rho_i A \rho_k B], \quad (5.7)$$

де ми використали визначення (I.4.9). Тоді (5.6) можна записати як:

$$\begin{aligned}
\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = & \epsilon_\mu^{\lambda_1} \epsilon_\nu^{*\lambda_1} \epsilon_\xi^{\lambda_2} \epsilon_\sigma^{*\lambda_2} \left\{ \frac{1}{(m^2 - u)^2} \left[4p_1^\sigma p_1^\xi \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu] - \right. \right. \\
& - 2p_1^\sigma k_{2,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\nu] - 2p_1^\xi k_{2,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu] + \\
& + k_{2,\alpha} k_{2,\beta} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\beta \gamma^\nu] \left. \right] + \\
& + \frac{1}{(m^2 - s)^2} \left[4p_1^\mu p_1^\nu \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi] + \right. \\
& + 2p_1^\mu k_{1,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\xi] + 2p_1^\nu k_{1,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi] + \\
& + k_{1,\alpha} k_{1,\beta} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\xi] \left. \right] + \\
& + \frac{1}{(m^2 - u)(m^2 - s)} \left[4p_1^\sigma p_1^\nu \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi] + \right. \\
& + 2p_1^\sigma k_{1,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\xi] - 2p_1^\nu k_{2,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi] - \\
& - k_{2,\alpha} k_{1,\beta} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\xi] \left. \right] + \\
& + \frac{1}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \left[4p_1^\mu p_1^\xi \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu] + \right. \\
& + 2p_1^\xi k_{1,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu] - 2p_1^\mu k_{2,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\nu] - \\
& \left. - k_{1,\alpha} k_{2,\beta} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\beta \gamma^\nu] \right] \left. \right\}. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Розглянемо найбільш простий випадок розсіяння неполяризованих частинок, у випадку коли значення кінцевої поляризації (спіральності) не фіксується. Це означає, що $|M_{fi}|^2$ потрібно усереднити по початковим поляризаційному та спіральному станам μ_1, λ_1 та підсумувати по всім можливим поляризаційним та спіральним станам кінцевих частинок μ_2, λ_2 , тобто треба

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \sum_{\mu_2, \lambda_2} \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1} |M_{fi}|^2. \tag{5.9}$$

Підсумовування легко виконати користуючись (4.13) та (D4.3.19):

$$\sum_{\mu_i=1}^2 \rho_i = \bar{\rho}_i = (m + \not{p}_i), \quad i = 1, 2 \tag{5.10}$$

$$\sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \epsilon_\mu^{\lambda_1} \epsilon_\nu^{*\lambda_1} \epsilon_\xi^{\lambda_2} \epsilon_\sigma^{*\lambda_2} = g_{\mu\nu} g_{\xi\sigma}. \tag{5.11}$$

Отже, (5.8) можна записати як

$$\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma} \left[\frac{A^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - u)^2} + \frac{B^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - s)^2} + \frac{C^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - u)(m^2 - s)} + \frac{D^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \right], \quad (5.12)$$

Аналізуючи явні вирази для тензорів A, B, C, D легко побачити, що за допомогою зміни німих індексів підсумовування між ними існують наступні співвідношення: $B^{\mu\nu\xi\sigma} = A^{\mu\nu\xi\sigma}(k_2 \rightarrow -k_1)$ та $C^{\mu\nu\xi\sigma} = D^{\mu\nu\xi\sigma}$.

Оскільки вирази, що входять в $|M_{fi}|^2$ (5.8) є подібними, ми детально розглянемо лише три типових доданка, в яких ρ_i замінимо $\bar{\rho}_i^1$.

Розрахунок доданку $g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\nu]$:

$$\begin{aligned} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\nu] &= Tr[(m + \not{p}_2)\gamma^\mu(m + \not{p}_1)\gamma^\nu] = \\ &= m^2 Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] + p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu]; \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] &= 4p_1^2 Tr[\gamma_\nu\gamma^\nu] = /(2.5)/ = \\ &= 4p_1^2 Tr[4I] = 64m^2; \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] &= 4p_1^2 p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma_\nu\gamma^\beta\gamma^\nu] = \\ &= /(2.6)/ = -8p_1^2 p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma^\beta] = -32m^2(p_1p_2); \end{aligned} \quad (5.15)$$

Звідки випливає

$$g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\nu] = 32m^2[2m^2 - (p_1p_2)]. \quad (5.16)$$

Розрахунок доданку $-2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu]$:

$$\begin{aligned} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] &= Tr[(m + \not{p}_2)\gamma^\mu(m + \not{p}_1)\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] = \\ &= m^2 Tr[\gamma^\mu\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] + p_{2,\beta}p_{1,\tau} Tr[\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu]; \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} -2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} Tr[\gamma^\mu\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] &= -2p_{1,\xi}k_{2,\alpha} Tr[\gamma_\nu\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] = \\ &= /(2.7)/ = -8p_{1,\xi}k_{2,\alpha} g^{\xi\alpha} Tr[I] = -32(p_1k_2); \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$-2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} p_{2,\beta} p_{1,\tau} Tr[\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] =$$

¹В наведених нижче розрахунках ми не вписуємо доданки, що містять добуток непарного числа γ -матриць згідно Розділу 13.

$$\begin{aligned}
&= -2p_{1,\xi}k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau}Tr[\gamma^\beta\underline{\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu}] = /(2.7)/ = \\
&= 4p_{1,\xi}k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau}Tr[\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\xi\gamma^\tau] = /(2.24)/ = \\
&= 16p_{1,\xi}k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau}(g^{\beta\alpha}g^{\xi\tau} - g^{\beta\xi}g^{\alpha\tau} + g^{\alpha\xi}g^{\beta\tau}) = 16m^2(p_2k_2); \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Звідки випливає

$$-2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] = -16m^2[2(p_1k_2) - (p_2k_2)]. \quad (5.20)$$

Розрахунок доданку $g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu]$:

$$\begin{aligned}
Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] &= Tr[(m + \not{p}_2)\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma(m + \not{p}_1)\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = \\
&= m^2Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] + p_{2,\lambda}p_{1,\omega}Tr[\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\omega\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu]; \quad (5.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] &= k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma_\xi\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = \\
&= k_{2,\alpha}k_{2,\beta}4Tr[\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu] = k_{2,\alpha}k_{2,\beta}16g^{\alpha\beta}Tr[I] = 64k_2^2 = 0; \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega}Tr[\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\omega\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] &= k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega} \times \\
&\times Tr[\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma_\xi\gamma^\omega\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = /(2.6)/ = -2k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega} \times \\
&\times Tr[\gamma^\lambda\underline{\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\omega\gamma^\beta\gamma^\nu}] = /(2.8)/ = 4k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega}Tr[\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\omega\gamma^\alpha] = \\
&= /(2.24)/ = 16k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega}(g^{\lambda\beta}g^{\omega\alpha} - g^{\lambda\omega}g^{\beta\alpha} + g^{\lambda\alpha}g^{\beta\omega}) = \\
&= 16((p_2k_2)(p_1k_2) - (p_1p_2)k_2^2 + (p_2k_2)(p_1k_2)) = 32(p_2k_2)(p_1k_2); \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Звідки випливає

$$g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = 32(p_2k_2)(p_1k_2). \quad (5.24)$$

Таким чином, з урахуванням коефіцієнту $1/4$ з (4.12), отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{M_{fi}}|^2}{8e^4} &= \frac{m^2[2m^2 - (p_1p_2)] - m^2[2(p_1k_2) - (p_2k_2)] + (p_2k_2)(p_1k_2)}{(m^2 - u)^2} + \\
&+ \frac{m^2[2m^2 - (p_1p_2)] + m^2[2(p_1k_1) - (p_2k_1)] + (p_2k_1)(p_1k_1)}{(m^2 - s)^2} + \\
&+ \frac{1}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \{m^2[m^2 + (p_1p_2)] + (k_1k_2)[-m^2 + 2(p_1p_2)] + \\
&+ 2m^2(p_1, k_1 - k_2) + m^2(p_2, k_1 - k_2) - 2(p_1p_2)(p_1, k_1 - k_2)\}. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Цей вираз можна звести до більш елегантного вигляду використовуючи закон збереження 4-імпульсу $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$ та $p_i^2 = m^2$, $k_i^2 = 0$:

$$\frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} = \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right), \quad (5.26)$$

де величини s, u, t визначені в (5.5).

Інваріант I , що входить в визначення перерізу (1.57) в нашому випадку дорівнює $I^2 = [s - m^2]^2/4$, отже переріз розсіяння неполяризованих електронів на неполяризованих фотонах (1.56):

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi} \frac{|M_{fi}|^2}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t) = 4r_e^2 \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\} \frac{m^2 d\varphi d(-t)}{(s-m^2)^2}, \quad (5.27)$$

де $r_e = \alpha/m = e^2/(4\pi m)$ — класичний радіус електрона.

Для кращого розуміння отриманого результату розглянемо часткові випадки. **В лабораторній системі відліку**, де початковий електрон покоїться, маємо $p_1 = (m, 0)$, $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$, $k_1 = \omega(1, \vec{k}_1/|\vec{k}_1|)$, $k_2 = \omega'(1, \vec{k}_2/|\vec{k}_2|)$.

Піднісни до квадрату рівність, що виражає збереження енергії-імпульсу в системі $p_1 + k_1 - k_2 = p_2$, отримуємо:

$$p_1 k_1 - p_1 k_2 - k_1 k_2 = 0, \quad (5.28)$$

що в нашому випадку буде мати вигляд

$$m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos\theta) = 0 \quad (5.29)$$

та дасть зв'язок між енергією фотона після взаємодії та кутом розсіяння фотона θ (кут між початковим та кінцевим вектором імпульсу фотона)

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \quad (5.30)$$

Як легко побачити, при нульовому куті розсіяння та в нерелятивістському випадку $\omega/m \ll 1$ (саме тому для видимого світла ефект зміни частоти фотона нівелиюється) енергія фотона не змінюється; очевидно, що найбільша зміна енергії відбувається при розсіянні назад.

До речі, саме завдяки цьому виразу, записаному через довжини хвиль фотона до та після розсіяння

$$\lambda' = \lambda + m^{-1}(1 - \cos \theta), \quad (5.31)$$

величина розмірністю довжини m^{-1} отримала назву комптонівської довжини хвилі частинки.

Явні вирази для кінематичних інваріантів (5.5) легко отримати

$$s = m^2 + 2m\omega; \quad u = m^2 - 2m\omega';$$

$$t = -2k_1 k_2 = -2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = / (5.30) / = -\frac{2m\omega^2(1 - \cos \theta)}{m + \omega(1 - \cos \theta)}. \quad (5.32)$$

Вважаючи початкову енергію фотона фіксованою, знаходимо

$$d(-t) = 2\omega'^2 \sin \theta d\theta. \quad (5.33)$$

Підставивши (5.32), (5.33) в (5.27) отримуємо остаточний вираз для перерізу електрон-фотонного розсіяння, котрий можна компактно записати використавши (5.30):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right). \quad (5.34)$$

Отриманий вираз отримав назву формули Клейна-Нішини й був вперше отриманий в 1929 році.

В нерелятивістському наближенні ($\omega/m \ll 1$) $\omega' \approx \omega$ і вираз (5.34) отримує вигляд формули Томсона (див. [7], § 78), отриманої в класичній теорії для розсіяння вільної нерухомої зарядженої частинки неполяризованим електромагнітним полем (наприклад, звичайним світлом):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (5.35)$$

Як можна побачити, зі збільшенням маси нерелятивістської зарядженої частинки переріз її розсіяння на фотоні швидко зменшується

($r_e^2 \sim m^{-2}$). Справа в тому, що в класичній теорії розсіяння відбувається за рахунок того, що електромагнітна хвиля діючи на заряджену частинку викликає її рух, що призводить до випромінювання частинкою нової хвилі в різні сторони. Отже, чим масивніша заряджена частинка, тим важче змусити її рухатись. Тобто у випадку $m \rightarrow \infty$ згідно класичних міркувань та отриманого нами виразу (5.34) розсіяння не повинно відбуватися, однак це не так. Вираз (5.34) був нами отриманий лише в першому неznикаючому наближенні. Вже в наступному наближенні (четвертий порядок по теорії збурень) будуть доданки, що не зникають при $m \rightarrow \infty$ [1].

Відмітимо також той факт, що диференційний переріз є величиною одного порядку при різних значеннях кута розсіяння. В класичній теорії це обумовлено тим, що падаюча електромагнітна хвиля є неполяризованою (усередненою по напрямкам напруженості електричного поля в площині перпендикулярній хвильовому вектору), завдяки чому заряджена частинка, рухаючись під дією цього поля, випромінює в різні сторони з майже однаковою інтенсивністю.

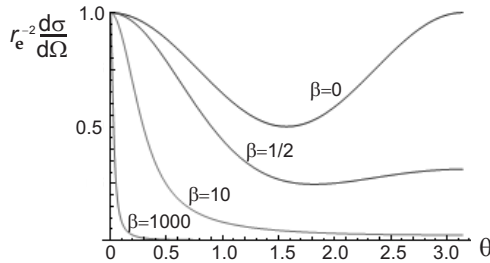


Рис. 0 Диференційний переріз електрон-фотонного розсіяння для різних значень параметра $\beta = \omega/m$ в лабораторній системі відліку.

При збільшенні енергії фотона диференційний переріз розсіяння отримує чітко виділений максимум при розсіянні вперед, тобто на малі кути (див. Рис. (5.1)). А в ультрарелятивістському наближенні ($\omega/m \gg 1$) він взагалі є ненульовим лише коли $\theta \rightarrow 0$, тобто

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\delta_{\theta,0}}{r_e^2}, \quad (5.36)$$

де $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера.

Як видно з (див. Рис. (5.1)) диференційний переріз $e-\gamma$ розсіяння (на відміну від випадку $e-e$ розсіяння) є скінченим при всіх значеннях кута розсіяння, тому можна обрахувати величину повного перерізу розсіяння

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = |\beta = \omega/m| = \\ &= \pi \frac{r_e^2}{\beta^3} \left[\frac{2\beta(2 + 8\beta + 9\beta^2 + \beta^3)}{(1 + 2\beta)^2} + (\beta^2 - 2\beta - 2) \ln(1 + 2\beta) \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

де в граничних випадках

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma = 8\pi/3; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma \sim \beta^{-1} \ln[\beta] \rightarrow 0. \quad (5.38)$$

Як видно з малюнку (5.2)) найбільшим переріз розсіяння буде при малих енергіях фотона, а при збільшенні енергії фотону переріз розсіяння спадає.

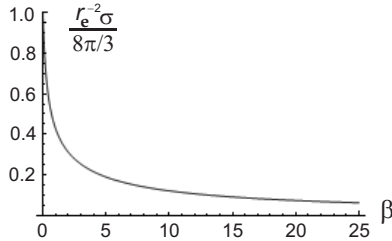


Рис. 0 Повний переріз електрон-фотонного розсіяння як функція параметра $\beta = \omega/m$ в лабораторній системі відліку.

В системі центру інерції енергії частинок, що налітають, до та після взаємодії не змінюються, змінюються лише напрямки їх імпульсів. Отже маємо

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, \omega \vec{p}_1 / |\vec{p}_1|), & k_1 &= \omega(1, -\vec{p}_1 / |\vec{p}_1|), \\ p_2 &= (E, \omega \vec{p}_2 / |\vec{p}_2|), & k_2 &= \omega(1, -\vec{p}_2 / |\vec{p}_2|), \end{aligned} \quad (5.39)$$

де $E = \sqrt{m^2 + \omega^2}$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \omega$. Тоді

$$\begin{aligned} s &= m^2 + 2\omega(E + \omega); & u &= m^2 - 2\omega(E + \omega \cos \theta); \\ t &= -2\omega^2(1 - \cos \theta); & d(-t) &= 2\omega^2 \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (5.40)$$

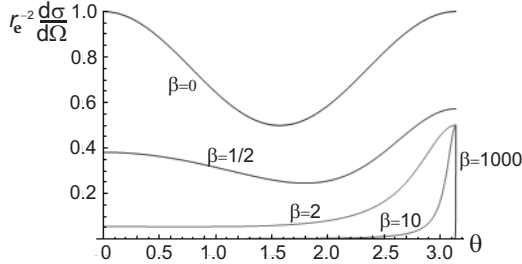


Рис. 0 Диференційний переріз електрон-фотонного розсіяння для різних значень параметра $\beta = \omega/m$ в системі центру інерції.

Підставивши (5.38) в (5.27) отримуємо громіздкий вираз для диференційного перерізу розсіяння, що в нерелятивістському наближенні ($\omega/m \ll 1$) співпадає з виразом (5.35), отриманим в лабораторній системі відліку. Ми не будемо його виписувати, однак відмітимо, що зі збільшенням енергії фотона поведінка диференційного перерізу в системі центру інерції кардинально змінюється, а саме спостерігається чіткий максимум при розсіянні в зворотній бік (див. Рис. (5.3)). При цьому в граничному випадку $\lim_{\beta \rightarrow \infty} (d\sigma/d\Omega) = 1/2\delta_{\theta,\pi}$, де $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера.

Вираз для повного перерізу розсіяння також має громіздкий вигляд, тому наведемо лише його графічне представлення (див. Рис. (5.4)) та граничні випадки:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma = 8\pi/3; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma \sim \beta^{-2} \ln[\beta] \rightarrow 0. \quad (5.41)$$

Як видно з малюнку та з аналітичних розрахунків, в системі центру інерції повний переріз розсіяння зі збільшенням енергії частинок, що налітають, спадає швидше ніж в лабораторній системі відліку (див. Рис. (5.2)).

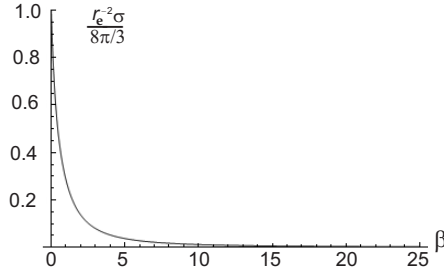


Рис. 0 Повний переріз електрон-фотонного розсіяння як функція параметра $\beta = \omega/m$ в системі центру інерції.

Поляризаційні ефекти комптонівського розсіяння

Поляризаційні ефекти при $e-\gamma$ розсіянні мають цікаві особливості. Для спрощення ми розглянемо їх в ультрарелятивістському наближенні в системі центру інерції та у випадку кірального представлення γ -матриць.

Відразу відмітимо, що в цьому випадку в (5.39) $E \simeq \omega$ і, згідно Рис. (16.3) розсіяння відбувається назад, $\theta = \pi - \chi$, $\chi \rightarrow 0$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} m^2 - u &= m^2 + (\omega\chi)^2 \\ m^2 - s &= -(m^2 + 4\omega^2) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Отже, основний вклад в амплітуду розсіяння (5.1) в ультрарелятивістському випадку буде давати перший доданок і наближено можна записати

$$M_{fi} = e^2 \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \frac{m + \not{p}_1 - \not{k}_2}{m^2 + (\omega\chi)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1. \quad (5.43)$$

В області малих значень кута χ ($m/\omega \ll \chi \ll 1$, відповідно $(\omega\chi)^2 \gg m^2$) знаменник (5.43) буде $\sim \chi^2$, що й пояснює максимум перерізу розсіяння при $\theta \rightarrow \pi$. В той же час, на відміну від інших процесів в ультрарелятивістському наближенні, ми не можемо просто покласти $m = 0$, й вимушені утримувати масовий доданок, щоб не було нефізичної розбіжності при $\theta = \pi$.

Розглянемо ситуацію, коли $\chi \ll 1$ та $\omega\chi \gg m$. В цьому випадку в чисельнику виразу (5.43) залишаються лише доданки $\not{p}_1 - \not{k}_2$

$$M_{fi} = e^2 \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2}{m^2 + (\omega\chi)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1, \quad (5.44)$$

де вираз для різниці векторів $p_1 - k_2$ зручно записати скориставшись Рис. 16.5:

$$p_1 - k_2 = (E - \omega, \omega(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/|\vec{p}_1|) \approx \omega\chi(0, \cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (5.45)$$

а кут φ — кут в площині перпендикулярній до вісі z , що визначає напрямок вектора $\vec{p}_1 - \vec{k}_2$.

З явного вигляду (5.44) випливає, що якщо початковий електрон знаходився в певному спіральному (кіральному) стані (тобто для його функції виконується відповідне співвідношення: $v_1 = \hat{P}_\pm v_1$), то й кінцевий електрон залишиться в тому ж спіральному стані. Це пов'язано з тим, що оператор проектування на певний кіральний стан початкового електрона при перенесенні через три γ -матриці перетвориться в проєктуючий оператор на інший кіральний стан, бо $\hat{P}_\pm \gamma^\mu = \gamma^\mu \hat{P}_\mp$, див. Додаток D.5.2.

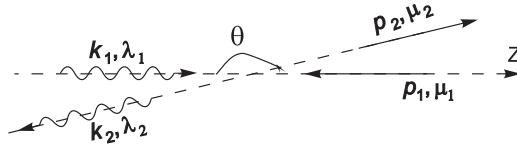


Рис. 0 Електрон-фотонне розсіяння назад в системі центру інерції в ультрарелятивістському випадку.

Припустимо, що початковий (а значить і кінцевий) електрон має праву кіральність, а початковий фотон має праву поляризацію. Якщо вибрати вісь z вздовж напрямку руху початкового фотона (див. Рис. 16.5), то згідно домовленості (див. Додаток D.4.4) поляризаційний 4-вектор початкового фотона матиме вигляд:

$$\epsilon^{\lambda_1} = \epsilon^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \quad (5.46)$$

Хвильові функції початкового та кінцевого електрона в кіральному представленні, згідно (D5.3.6), дорівнюють:¹

¹В принципі, ми повинні були б вписати відповідні фазові множники в (5.47), (5.48). Однак це просто б призвело до появи додаткового загального фазового множника в (5.53), який не вплине на вираз для перерізу процесу.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon\omega_k^{(+)}} \end{pmatrix} = /(\text{D5.1.28}), \theta' = \pi/ = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon\omega_k^{(+)}} \end{pmatrix} = /(\text{D5.1.28}), \theta' = 0/ = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

В цьому випадку наступна величина з (5.43) явно отримується

$$\bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} = (v_2)^+ \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^{\lambda_1} \equiv 0. \quad (5.49)$$

Отже, в нашому наближенні амплітуда зазначеного процесу дорівнює нулеві й процес не може відбутися. Відповідно, початковий фотон повинен мати від'ємну проекцію спіну на напрямок руху (ліву поляризацію) і описуватися поляризаційним вектором

$$\epsilon^{\lambda_1} = \epsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0). \quad (5.50)$$

Кінцевий стан фотона легко визначити аналогічним способом. Явно переконавшись, що

$$\not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 = 0, \quad \text{для} \quad \epsilon^{\lambda_2} = \epsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (5.51)$$

приходимо до висновку, що кінцевий фотон повинен описуватися поляризаційним вектором²

$$\epsilon^{\lambda_2} = \epsilon^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \quad (5.52)$$

Враховуючи, що кінцевий фотон рухається проти напрямку вісі z , приходимо до висновку, що він залишається з лівою поляризацією та має від'ємну проекцію спіну на напрямок руху.

²Звичайно, потрібно було б врахувати, що кінцевий фотон не рухається паралельно вісі z і його поляризаційний вектор насправді відрізняється від $\epsilon^{1,2} = (0, 1, \mp i, 0)/\sqrt{2}$. Однак ці відмінності будуть давати вклад в вищому порядку по χ і нами не враховуються.

Підставивши (5.45), (5.47), (5.48), (5.50), (5.52) в (5.44) отримаємо, що при виконанні умов $m/\omega \ll 1$, $\chi \ll 1$, $\omega\chi \gg m$

$$M_{fi}(e_R\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_L) = -e^2 e^{i\varphi} \frac{4\chi}{m^2/\omega^2 + \chi^2}, \quad (5.53)$$

а в аналогічному випадку, коли початковий електрон має ліву поляризацію легко отримати, що можливий лише процес $e_L\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_R$, причому

$$M_{fi}(e_L\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_R) = M_{fi}(e_R\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_L). \quad (5.54)$$

У випадку, коли $\chi \rightarrow 0$, але $\omega\chi \ll m$ в чисельнику виразу (5.43) залишається лише масовий доданок

$$M_{fi} = e^2 \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \frac{m}{m^2 + (\omega\chi)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \quad (5.55)$$

і це кардинально змінює характер комптонівського розсіяння.

Якщо початковий електрон знаходився в певному спіральному (кіральному) стані, то кінцевий електрон, на відміну від попереднього випадку, повинен змінити спіральний стан на протилежний. Це пов'язано з тим, що оператор проектування на певний кіральний стан початкового електрона буде вже переноситися не через три, а через дві γ -матриці.

Відповідно, якщо початковий електрон мав праву поляризацію, то кінцевий електрон матиме ліву поляризацію, тобто, згідно (D5.3.6),

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(-)} \\ 0 \end{pmatrix} = /(\text{D5.1.28}), \theta' = \chi/ = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

і його згортка з лівополяризованим початковим фотоном даватиме нуль. Відповідно в початковому стані може бути лише фотон з правою поляризацією. Висновок щодо кінцевого стану фотона, що базується на добутку $\not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1$, залишається без змін — кінцевий фотон має ліву поляризацію. Тобто, у випадку дуже малих кутів розсіювання ($\omega\chi \ll m$) початковий електрон та фотон, в результаті розсіювання, змінюють свої поляризації.

Підставивши (5.47), (5.56), (5.46), (5.52) в (5.55) отримаємо, що при виконанні умов $m/\omega \ll 1$, $\chi \ll 1$, $\omega\chi \ll m$

$$M_{fi}(e_R\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_L) = -4e^2 \frac{m/\omega}{m^2/\omega^2 + \chi^2}, \quad (5.57)$$

а в аналогічному випадку, коли початковий електрон має ліву поляризацію легко отримати, що можливий лише процес $e_L\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_R$, причому

$$M_{fi}(e_L\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_R) = M_{fi}(e_R\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_L). \quad (5.58)$$

Зазначена жорстка залежність протікання процесу комптонівського розсіяння в ультрарелятивістському випадку від параметра $\omega\chi$ дозволяє за допомогою одного пучка (електронного або фотонного) з відомою поляризацією (наприклад, за допомогою променя лазера з певною поляризацією) вимірювати поляризацію частинок іншого пучка, або виділяти з неполяризованого пучка частинки з певною поляризацією.

Завдання

1. Перевірити справедливість виразу (5.25).
2. Перевірити справедливість виразу (5.26).
3. Вважаючи, що електрон являє собою сферу, в якій сферично-симетрично розподілений заряд з густиною $\rho(r)$, знайдіть радіус цієї сфери (радіус електрона) з умови, щоб енергія електричного поля дорівнювала енергії електрона, як масивної частинки, тобто $m_e c^2$. Якою повинна бути густина заряду в сфері, щоб отриманий радіус співпадав з класичним радіусом електрона?
4. Відновіть вираз для комптонівської довжини хвилі частинки в системі СІ. Який фізичний зміст комптонівської та де-бройлевської довжини хвилі частинки? Яка з них є більшою? У випадку, коли частинка є електроном, як вони співвідносяться з класичним радіусом електрона?
5. Отримайте асимптотичні вирази для повного перерізу розсіяння (5.38), (5.41).

6. Доведіть співвідношення (5.45).
7. В ультрарелятивістському наближенні, коли вкладом другого доданку в (5.42) було знехтувано, було отримано твердження, що комптонівське розсіяння не відбувається, коли початковий електрон та фотон мають праву кіральність. Переконайтесь, що це твердження залишиться справедливим при врахуванні другого доданку в (5.42).
8. Доведіть співвідношення (5.49), (5.53), (5.57).
9. Доведіть твердження (5.54), (5.58).

РОЗДІЛ 6

Електрон-позитронна анігіляція в два фотона

Як неважко побачити, процес електрон-позитронної анігіляції є перерхресним каналом (t -каналом) до процесу комптонівського розсіяння, а саме: амплітуда процесу анігіляції відрізняється від амплітуди комптонівського розсіяння заміною кінцевого стану електрона на початковий стан позитрона $p_2 \rightarrow -p_2$ та початкового стану фотона на його кінцевий стан $k_1 \rightarrow -k_1$, див. Розділ 9. Фактично, в виразі для квадрата модуля амплітуди комптонівського розсіяння після обрахунку всіх згорток (5.25) потрібно замінити імпульси $p_2 \rightarrow -p_2$ та $k_1 \rightarrow -k_1$.

Мовою попереднього Розділу вираз для квадрата амплітуди процесу електрон-позитронної анігіляції через кінематичні інваріанти буде співпадати з (5.26), де в s та t зроблена зазначена заміна імпульсів, тобто $s = (p_1 - k_1)^2$, $t = (p_1 + p_2)^2$. Однак для процесу електрон-позитронної анігіляції вираз для s повинен визначатися через суму 4-імпульсів початкових частинок, тобто електрона та позитрона, а вираз для t через різницю початкового електрона та кінцевого фотона, тобто для процесу електрон-позитронної анігіляції потрібно ще зробити перепозначення $s \leftrightarrow t$, отже:

$$\begin{aligned} \frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} = & \left(\frac{m^2}{t - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{t - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{t - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{t - m^2} \right), \quad (6.1) \end{aligned}$$

де величини s, u, t визначені як

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (k_2 + k_1)^2 = 2(k_1 k_2); \\ t &= (p_1 - k_1)^2 = m^2 - 2(p_1 k_1); \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = m^2 - 2(p_1 k_2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Інваріант I , що входить в визначення перерізу (1.57) в нашому випадку дорівнює $I^2 = s[s - 4m^2]/4$, отже переріз електрон-позитронної анігіляції (1.56):

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi} \frac{|M_{fi}|^2}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t) = 4r_e^2 \left\{ \left(\frac{m^2}{t - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{t - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{t - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{t - m^2} \right) \right\} \frac{m^2 d\varphi d(-t)}{s(s - 4m^2)}, \quad (6.3)$$

де $r_e = \alpha/m = e^2/(4\pi m)$ — класичний радіус електрона. Відмітимо, що в останньому множнику автоматично враховано той факт, що частинки в початковому та кінцевому стані мають різні маси, див. (1.37), (1.38).

Розглянемо процес електрон-позитронної анігіляції в системі центру інерції, в якій

$$p_1 = (E, \vec{p}_1), \quad p_2 = (E, -\vec{p}_1), \quad k_1 = E(1, -\vec{p}_2/|\vec{p}_2|), \quad k_2 = E(1, \vec{p}_2/|\vec{p}_2|), \quad (6.4)$$

де $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}_1^2}$ — енергія електрона (позитрона) з імпульсом \vec{p}_1 . Тоді

$$s = 4E^2; \quad u = -m^2 - 2|\vec{p}_1|(|\vec{p}_1| - E \cos \theta); \\ t = -m^2 - 2|\vec{p}_1|(|\vec{p}_1| + E \cos \theta); \quad d(-t) = -2|\vec{p}_1|E \sin \theta d\theta, \quad (6.5)$$

де кут анігіляції θ визначається як кут між векторами \vec{p}_1 та \vec{k}_2 .

Підставивши (6.5) в формулу для перерізу анігіляції (6.3) отримуємо наступний вираз

$$\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E|\vec{p}_1|} \left[\frac{E^2 + \vec{p}_1^2 \cos^2 \theta + 2m^2}{m^2 + \vec{p}_1^2 \sin^2 \theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + \vec{p}_1^2 \sin^2 \theta)^2} \right]. \quad (6.6)$$

Для чисельного аналізу цього виразу зручно виразити імпульс електрона через його енергію та ввести безрозмірний параметр $\beta = E/m$:

$$\frac{4E|\vec{p}_1|}{\alpha^2} \frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} = \frac{\beta^2(1 + \cos^2 \theta) + 2 - \cos^2 \theta}{\beta^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} - \frac{2}{(\beta^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2} \quad (6.7)$$

Поведінка безрозміреного перерізу реакції представлена на Рис. 17.1. Як видно з малюнку, найменш ймовірним є процес випромінювання фотонів в напрямку перпендикулярному до лінії зустрічного руху електрона та позитрона, а найбільш ймовірним — в паралельному напрямку. Відмітимо, що при найменшій можливій енергії системи ($E \rightarrow m$) кутова залежність перерізу реакції відсутня, а при збільшенні енергії відбувається різке збільшення безрозміреного перерізу реакції в області $\theta \rightarrow 0$ ($\theta \rightarrow \pi$). Легко помітити, що кутова залежність перерізу анігіляції (6.8) має симетрію відносно заміни $\theta \rightarrow \pi - \theta$, що пов'язано з неможливістю відрізнити між собою перший та другий фотон (фотони тотожні частинки).

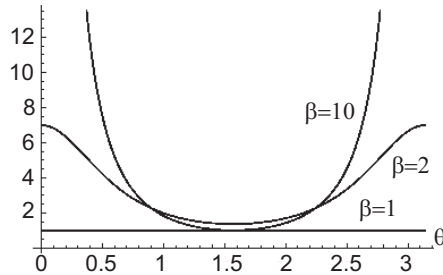


Рис. 0 Кутова частина перерізу реакції електрон-позитронної анігіляції в системі центру інерції для різних енергій частинок. По вісі ординат відкладено праву частину виразу (6.7), параметр $\beta = E/m$.

В ультрарелятивістському випадку ($E \gg m$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = E$) вираз (6.6) спрощується до вигляду

$$\left(\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} \right)_{\text{y.p.}} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (6.8)$$

що є справедливим для не дуже малих кутів ($\sin \theta > m/E$). Незавжно отримати, що для нульового кута анігіляції існує скінченне значення перерізу

$$\left(\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} \right)_{\text{y.p., } \theta=0} = \frac{r_e^2}{2}. \quad (6.9)$$

В нерелятивістському випадку ($E \approx m$, $|\vec{p}_1| \rightarrow 0$) з (6.6) маємо

відсутність кутової залежності в диференційному перерізі реакції

$$\left(\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{\alpha^2}{4E|\vec{p}_1|} = \frac{r_e^2}{4\sqrt{1 - m^2/E^2}}, \quad (6.10)$$

відповідно повний переріз реакції

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}|_{\text{н.р.}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{\pi}{2} \frac{r_e^2}{\sqrt{1 - m^2/E^2}}, \quad (6.11)$$

де за допомогою множника $1/2$ ми врахували, що кінцеві частинки є тотожними.

Повний переріз реакції потрібно обраховувати коректно за допомогою загального виразу (6.6). В загальному вигляді результат є доволі громіздким, але в ультрарелятивістському випадку він суттєво спрощується:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}|_{\text{у.р.}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{у.р.}} = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{E^2} \ln \frac{4E^2}{m^2}, \quad (6.12)$$

де поява множника $1/2$ також обумовлена тотожністю кінцевих частинок.

Важливим є те, що повний переріз реакції є скінченною величиною і при великих значеннях енергії спадає повільніше за $1/E^2$.

Завдання

1. Побудуйте діаграми для процесу електрон-позитронної анігіляції.
2. Розгляньте процес електрон-позитронної анігіляції в лабораторній системі відліку.
3. Розгляньте процес однофотонної електрон-позитронної анігіляції в зовнішньому полі в системі центру інерції. При фіксованій енергії ферміонів знайдіть залежність перерізу реакції від енергії кінцевого фотона.
4. Доведіть співвідношення (6.8) та (6.9).

5. Враховуючи (6.9) знайдіть максимальне значення функції, що представлена на Рис. 17.1.
6. Розгляньте зворотній процес, а саме утворення електрон-позитронної пари двома фотонами.

РОЗДІЛ 7

Народження частинок при електрон-позитронних зіткненнях

В прискорювачах на зустрічних пучках (їх часто називають колайдерами від англ. *collide* — зіштовхуватися), в яких зіштовхуються електрони та позитрони, при збільшенні енергії частинок почнуть відбуватися процеси за межами квантової електродинаміки як квантової теорії електронів, позитронів та фотонів.

Розглянемо процес ee^+ зіткнень та розрахуємо ймовірність народження всіх можливих двочастинкових пар¹ завдяки електромагнітній взаємодії², а саме нас будуть цікавити процеси народження лептонних $\mu\mu^+$, $\tau\tau^+$ та кваркових qq^+ пар. Часто ці процеси також відносять до процесів КЕД.

Утворення пари мюон-антимюон $\mu\mu^+$

Для початку розглянемо процес утворення мюон-антимюонної пари $e + e^+ \rightarrow \mu + \mu^+$. Цей процес є одним з найважливіших процесів в фізиці високих енергій. Саме він використовується для калібрування ee^+ колайдерів. Процес $e + e^+ \rightarrow \mu + \mu^+$ є перехресним каналом електрон-мюонного розсіяння, що розглядався в Розділі 11. Відповідно до (I.11.14) та позначень представлених на Рис. 18.1 матимемо:

$$S_{fi}^{(2)} = ie^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \cdot \frac{(\bar{v}_{-2} \gamma^\nu v_1)(\bar{V}_4 \gamma_\nu V_{-3})}{(p_1 + p_2)^2}, \quad (7.1)$$

¹Окрім фотонів, утворення яких було розглянуто в попередньому Розділі.

²Як видно з окремих частин лагранжіану СМ (I.11.23) та (I.11.29) в результаті ee^+ зіткнень може утворитися нейтральний Z -бозон або бозон Хігса, а також пари з усіх ферміонів, що є в СМ, за допомогою обміну віртуальним Z -бозоном або бозоном Хігса.

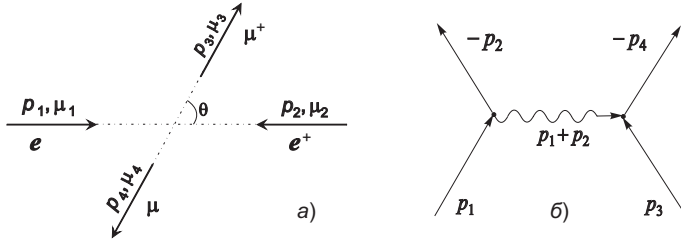


Рис. 0 Утворення мюон-антимюонної пари: а) – схематичний вигляд, б) – діаграма процесу.

де функція $v_{\pm i}$ відноситься до i -го електрона (позитрона), а $V_{\pm i}$ – до i -го мюона (антимюона).

Відповідно до (I.1.34) та (I.1.40) амплітуда переходу:

$$M_{fi} = e^2 \cdot \frac{(\bar{v}_{-2} \gamma^\nu v_1)(\bar{V}_4 \gamma_\nu V_{-3})}{(p_1 + p_2)^2}, \quad (7.2)$$

а квадрат її модуля відповідно до (2.3), (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \frac{(\bar{v}_{-2} \alpha \gamma_\alpha^\nu v_{1\beta})(\bar{V}_{4\delta} \gamma_\nu V_{-3\epsilon})(\bar{v}_{1\zeta} \gamma_\zeta^\mu v_{-2\eta})(\bar{V}_{-3\eta} \gamma_\mu V_4)}{(p_1 + p_2)^4} = \\ &= \frac{Tr[\gamma^\nu \rho_1 \gamma^\mu \rho_{-2}] Tr[\gamma_\nu \bar{\rho}_{-3} \gamma_\mu \bar{\rho}_4]}{(p_1 + p_2)^4}, \quad (7.3) \end{aligned}$$

де $\rho_{\pm i}$ визначається як і $\rho_{\pm i}$ (I.4.9), але по відношенню до мюонів.

Для простоти розглянемо випадок неполяризованих частинок. В результаті усереднення та підсумовування по поляризаціям (4.12) отримуємо:

$$\begin{aligned} 4 \frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \frac{Tr[\gamma^\nu \bar{\rho}_1 \gamma^\mu \bar{\rho}_{-2}] \cdot Tr[\gamma_\nu \bar{\rho}_{-3} \gamma_\mu \bar{\rho}_4]}{(p_1 + p_2)^4} = / (4.13) / = \\ &= \frac{Tr[\gamma^\nu (m_e + \not{p}_1) \gamma^\mu (m_e - \not{p}_2)] \cdot Tr[\gamma_\nu (m_\mu - \not{p}_3) \gamma_\mu (m_\mu + \not{p}_4)]}{(p_1 + p_2)^4}. \quad (7.4) \end{aligned}$$

В цьому місці має сенс знехтувати масою електрона в порівнянні з масою мюона, бо $m_e/m_\mu \approx 1/200$ і неточність пов'язана з зануленням

m_e є суттєво меншою за вклад від поправок вищих порядків теорії збурень [13]. Отже

$$4 \frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = - \frac{Tr[\gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2] \cdot Tr[\gamma_\nu (m_\mu - \not{p}_3) \gamma_\mu (m_\mu + \not{p}_4)]}{(p_1 + p_2)^4}. \quad (7.5)$$

По аналогії з (4.16) легко отримати, що

$$Tr[\gamma_\nu (m_\mu - \not{p}_3) \gamma_\mu (m_\mu + \not{p}_4)] = 4[p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} (p_1 p_2) + p_1^\nu p_2^\mu], \quad (7.6)$$

$$= 4[m_\mu^2 g_{\mu\nu} - p_{3\mu} p_{4\nu} + g_{\mu\nu} (p_3 p_4)] - p_{3\nu} p_{4\mu}. \quad (7.7)$$

Тоді

$$\frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} = \frac{m_\mu^2 (p_1 p_2) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)}{(p_1 + p_2)^4}. \quad (7.8)$$

Оскільки нас цікавить процес, що відбувається на колайдері на зустрічних пучках, то ми повинні перейти в систему центру інерції. Використавши узагальнений вираз для перерізу реакції в цьому випадку (1.37) отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega_3} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3|}{E^2 |\vec{p}_1|} =$$

$$= 2\alpha^2 \frac{m_\mu^2 (p_1 p_2) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)}{E^2 (p_1 + p_2)^4} \cdot \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}, \quad (7.9)$$

де $E = E_1 + E_2$ — повна енергія системи, $\alpha = e^2/4\pi$ — постійна тонкої структури.

В нашому випадку 4-імпульси частинок мають наступний вигляд: $p_1 = (E/2, \vec{p}_1)$, $p_2 = (E/2, -\vec{p}_1)$, $p_3 = (E/2, \vec{p}_3)$, $p_4 = (E/2, -\vec{p}_3)$. Оскільки в нашому наближенні $m_e = 0$, то $|\vec{p}_1| = E_1 = E/2$, а $|\vec{p}_3| = \sqrt{(E/2)^2 - m_\mu^2}$. Підставивши наведені вирази в (7.9) отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left[1 + \left(\frac{2m_\mu}{E} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{2m_\mu}{E} \right)^2 \right] \cos^2 \theta \right] \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\mu}{E} \right)^2}, \quad (7.10)$$

де кут θ — кут між векторами \vec{p}_1 та \vec{p}_3 .

Відразу відмітимо, що останній множник (модуль імпульсу мюона) автоматично забезпечує ненульовий переріз реакції лише за умови, коли повна енергія електрон-позитронної пари буде більшою за

мінімально можливу енергію утвореної мюон-антимюонної пари, тобто коли $E > 2m_\mu$.

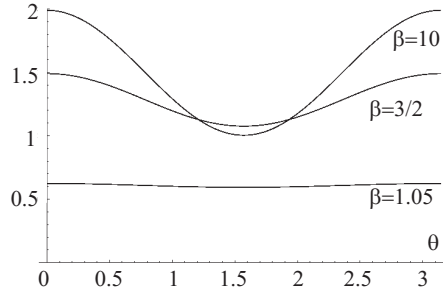


Рис. 0 Кутова частина реакції утворення мюон-антимюонної пари в системі центру інерції для різних енергій частинок. По вісі ординат відкладено обезрозмірений переріз $\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}}{d\Omega_3} \frac{4E^2}{\alpha^2}$, параметр $\beta = E/2m_\mu$.

Асимптотичні вирази для перерізу реакції легко отримати з (7.10):

$$\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4E^2} (1 + \cos^2 \theta), \quad E \gg 2m_\mu; \quad (7.11)$$

$$\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left[1 + \left(\frac{2m_\mu}{E} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\mu}{E} \right)^2}, \quad E \rightarrow 2m_\mu. \quad (7.12)$$

Відмітимо також, що залежність перерізу реакції є симетричною по відношенню до заміни $\theta \rightarrow \pi - \theta$, див. Рис. 18.2. Це пояснюється тим, що в системі центру інерції, згідно діаграми на Рис. 18.1б, електрон та позитрон анігілюють в віртуальний фотон з нульовим просторовим імпульсом, який потім "розвалюється" на мюон та антимюон. При цьому ймовірність того, що мюон полетить в одному фіксованому напрямку, а антимюон в протилежному до нього та навпаки є однаковою.

Як видно з Рис. 18.2 найменшою є ймовірність вильоту мюон-антимюонної пари в напрямку перпендикулярному до лінії руху початкового електрона та позитрона, а найбільшою — в паралельному напрямку. При цьому чим менша повна енергія системи, тим меншою

є кутова залежність перерізу реакції, що явно видно з асимптотичного виразу (7.12).

З отриманого диференційного перерізу реакції (7.10) легко отримати повний переріз проінтегрувавши по кутовим змінним:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+} = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\mu}{E}\right)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2m_\mu}{E}\right)^2 \right]. \quad (7.13)$$

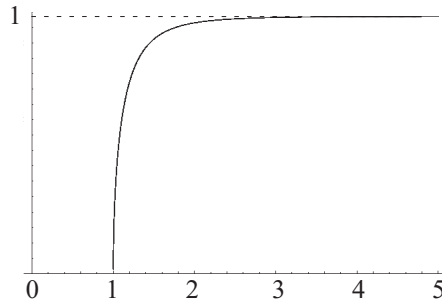


Рис. 0 Повний переріз реакції утворення мюон-антимюонної пари в системі центру інерції. По вісі ординат відкладено безрозмірний переріз $\frac{3}{4\pi\alpha^2} E^2 \sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}$, по вісі абсцис $E/2m_\mu$.

Графічно залежність повного перерізу реакції представлена на Рис. 18.3. Як ми вже відзначили, переріз є ненульовим лише в області $E > 2m_\mu$. При великих значеннях повної енергії системи безрозмірний переріз реакції швидко виходить на постійне значення $\sigma E^2 = 4\pi\alpha^2/3$ по закону

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{2m_\mu}{E}\right)^4 \right], \quad E \gg 2m_\mu. \quad (7.14)$$

Отже, при великих значеннях енергії частинок (електрона та позитрона) переріз реакції утворення мюон-мюонної пари спадає до нуля за законом $\sigma \sim \alpha^2/E^2$. Так і повинно бути з загальних міркувань:

множник E^{-2} повинен бути з міркувань розмірності¹, множник α^2 зумовлений розглядом процесу в другому порядку по теорії збурень.

Значення на яке виходить переріз анігіляції ee^+ пари в системі центру інерції є універсальним і зручним. До речі, в експериментальній фізиці високих енергій вимірювання процесів при ee^+ анігіляції відбувається в одиницях $R = 4\pi\alpha^2/3E^2$.

Утворення пари $\tau\tau^+$

Розгляд утворення пари $\tau\tau^+$ при електрон-позитронних зіткненнях повністю аналогічний наведеному вище розгляду утворення мюон-антимюонних пар. Необхідні вирази отримуються заміною маси мюона на масу τ -лептона.

Оскільки реакції утворення частинок при анігіляції ee^+ пари мають чітку границю для їх проходження $E > 2m_i$, то їх використовують для визначення мас утворюваних частинок.

Наприклад, для утворення τ частинок зручно експериментально знаходити відношення:

$$\frac{\sigma_{ee^+ \rightarrow \tau\tau^+}}{\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}} = \frac{\sigma_{ee^+ \rightarrow \tau\tau^+}}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\tau}{E}\right)^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2m_\tau}{E}\right)^2 \right], \quad (7.15)$$

бо маса τ -частинки є набагато більшою за масу мюона, відповідно, коли народжується $\tau\tau^+$ пара, переріз реакції з утворенням мюонної пари виходить на постійне значення R .

Корисно навести порівняння отриманого виразу з експериментом, див. Рис. 18.4 (W. Vacino, et. al., Phys. Rev. Lett. **41**, 13, (1978)). З наведеного малюнка чітко границю, коли починається утворення $\tau\tau^+$ пари. Можна оцінити масу τ -частинки $m_\tau \simeq 1.8$ GeV.

Утворення кваркових пар qq^+

Розглянемо процес утворення кваркових пар qq^+ через віртуальний фотон при ee^+ анігіляції.

Для цього нам потрібно врахувати, що електричні заряди i -го кварка відрізняються від заряду електрона на множник Q_i . Отже в наведених вище формулах потрібно замінити $\alpha \rightarrow Q_i^2\alpha$.

¹Маса мюона не може входити в цей вираз, оскільки в границі $E \gg 2m_\mu$ масу частинки можна покласти нулеві.

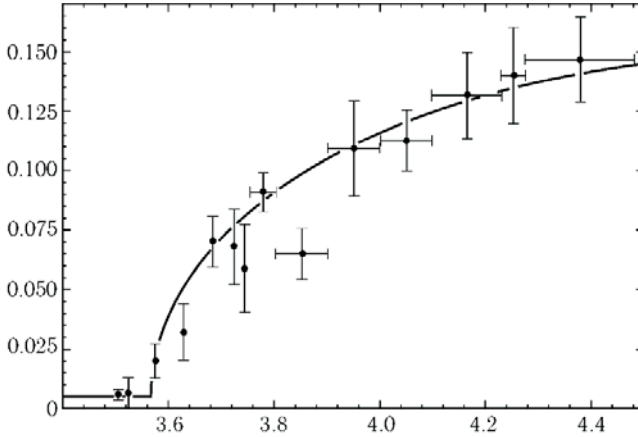


Рис. 0 По вісі ординат відкладено відношення $\frac{\sigma_{ee^+ \rightarrow \tau\tau^+}}{\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}}$, по вісі абсцис — повну енергію в системі в GeV.

По-друге, врахувати, що кварки мають три можливих значення кольорових зарядів: синій, червоний та зелений, а антикварки, відповідно: антисиній, античервоний та антизелений. Таким чином при утворенні пари qq^+ їй колір відсутній. При ee^+ анігіляції з рівною ймовірністю будуть утворюватися кварки всіх кольорів, отже врахування кольорів призведе до множення перерізу процесу утворення конкретної пари qq^+ на три.

По-третє, після утворення кварків вони почнуть взаємодіяти між собою згідно законів квантової хромодинаміки і будуть утворювати зв'язані кваркові стани — ґадрони (мезони та баріони). Виявляється, що в області енергій набагато більшій за маси кварків qq^+ цей процес не впливає суттєвим чином на переріз реакції (перевірка цього факту виходить за межі даного курсу).

Отже, для високоенергетичної області утворення пари qq^+ матимемо:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow q_i q_i^+} = 3Q_i^2 R. \quad (7.16)$$

А повний переріз процесів з утворенням всіх можливих ґадронів при

ee^+ анігіляції при високих енергіях

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \text{гадрони}} = 3R \sum_i Q_i^2. \quad (7.17)$$

Перерахуємо всі шість ароматів кварків в порядку зростання їх маси із зазначенням їх маси (наближено) та заряду:

u -кварк: $m_u = 3$ МеВ, $Q_u = 2/3$,

d -кварк: $m_d = 6$ МеВ, $Q_d = -1/3$,

s -кварк: $m_s = 0.1$ ГеВ, $Q_s = -1/3$,

c -кварк: $m_c = 1.3$ ГеВ, $Q_c = 2/3$,

b -кварк: $m_b = 4.3$ ГеВ, $Q_b = -1/3$,

t -кварк: $m_t = 175$ ГеВ, $Q_t = 2/3$.

Експерименти по народженню гадронів проводились в області від 1 до 40 ГеВ. Оцінимо, який результат ми очікуємо побачити.

В області суттєво більшій за $2 \times 0.1 = 0.2$ ГеВ, але меншій за $2 \times 1.3 = 2.6$ ГеВ повинно бути

$$\sigma_1 = 3R(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2) = 2R. \quad (7.18)$$

В області суттєво більшій за 2.6 ГеВ, але меншій за $2 \times 4.3 = 8.6$ ГеВ повинно бути

$$\sigma_1 = 3R(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 + Q_c^2) = 10R/3. \quad (7.19)$$

В області суттєво більшій за 8.6 ГеВ, але меншій за $2 \times 175 = 350$ ГеВ повинно бути

$$\sigma_1 = 3R(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 + Q_c^2 + Q_b^2) = 11R/3. \quad (7.20)$$

Звіримо наше передбачення з результатом експерименту, див. Рис. 18.5. Суцільною лінією показано результат наших передбачень, пунктирна лінія — результат передбачень з урахуванням впливу квантової хромодинаміки. Точками виділені енергії при яких народжуються гадрони.

Як видно, результат експерименту непогано узгоджується з теоретичними передбаченнями. Підтверджується також необхідність врахування кольорового множника три, що підтверджує існування трьох кольорів для кварків.

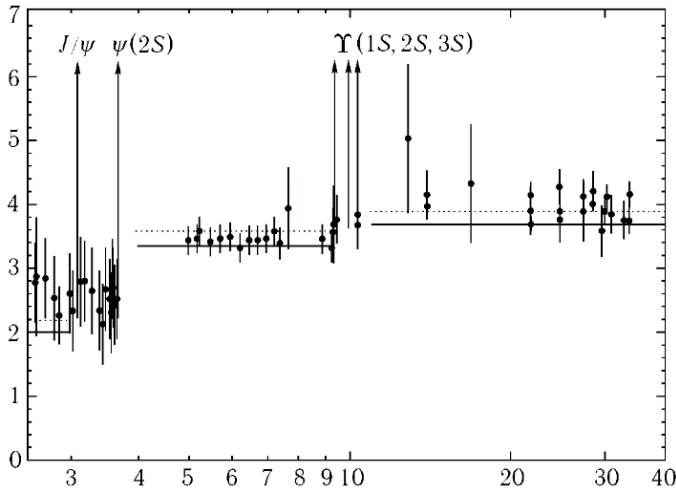


Рис. 0 По вісі ординат відкладено відношення $\frac{\sigma_{ee \rightarrow \text{Гадрони}}}{\sigma_{ee \rightarrow \mu\mu^+}}$, по вісі абсцис — повну енергію в системі в GeV (M.Swartz, Phys. Rev. D**53**, 5268 (1996)).

Завдання

1. Отримайте співвідношення (7.10).
2. Отримайте співвідношення (7.13) та (7.14).
3. Розгляньте зворотній процес, а саме утворення ee^+ пари парою $\mu\mu^+$.
4. В принципі, при теоретичному розрахунку утворення нових частинок через віртуальний фотон внаслідок електрон-фотонної анігіляції потрібно враховувати й можливість утворення нових частинок через віртуальний Z -бозон. Чому ми бачимо гарне узгодження з експериментом (див. Рис. 18.4 та Рис. 18.5), де вклад від Z -бозона не враховувався.

РОЗДІЛ 8

Розпад Z -бозону

Розглянемо розпад Z -бозону на всі можливі частинки та знайдемо повну ширину його розпаду в лабораторній системі відліку, де Z -бозон покоїться. \hat{S} -матриця цього процесу в першому порядку теорії збурень була розрахована в Розділі 11 лише для випадку розпаду бозону на електрон-позитронну пару. Очевидно, що вираз для розпаду на іншу ферміон-антиферміонну пару $f\bar{f}$ не зміниться. Потрібно лише підставити відповідні значення констант g_v^f та g_a^f та врахувати, що за рахунок δ -функції, що виражає закон збереження енергії-імпульсу, Z -бозон може розпастися лише на частинки, чії маси задовольняють умові $m_f \leq M_Z/2$.

Враховуючи, що маса Z -бозону становить близько 91 ГеВ, приходимо до висновку, що він може розпастися на всі ферміони СМ окрім розпаду на пару найважчих кварків $t\bar{t}$ ($m_t = 175$ ГеВ). Тобто можливі розпади на всі типи нейтрино $\nu_e\bar{\nu}_e$, $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$, $\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$; на всі пари заряджених лептонів $e\bar{e}$, $\mu\bar{\mu}$, $\tau\bar{\tau}$; та на п'ять типів кварків $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $c\bar{c}$, $s\bar{s}$, $b\bar{b}$ (насправді розпад Z -бозону відбувається не на кварки, а на гадрони, однак ми будемо цим нехтувати).

Згідно означень (I.1.34), (I.1.40) та виразу для матриці розпаду Z -бозону в першому порядку теорії збурень (I.11.33), амплітуда розпаду Z -бозону має вигляд

$$M_{fi} = -B \bar{v}_f \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) v_{-f} \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}), \quad (8.1)$$

де k — початковий 4-імпульс Z -бозону, λ — його поляризація.

Для знаходження $|M_{fi}|^2$ використаємо (2.3), (2.4):

$$|M_{fi}|^2 = B^2 \bar{v}_f \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) v_{-f} \bar{v}_{-f} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) v_f \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \epsilon_\nu^{*\lambda}(\vec{k}). \quad (8.2)$$

Вважаючи комбінацію матриць $\gamma^\mu(g_v^f - g_a^f\gamma^5)$ як нову матрицю A^μ отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{v}_{f,\alpha} A_{\alpha\beta}^\mu v_{-f,\beta} \bar{v}_{-f,\gamma} A_{\gamma\delta}^\nu v_{f,\delta} &= A_{\alpha\beta}^\mu v_{-f,\beta} \bar{v}_{-f,\gamma} A_{\gamma\delta}^\nu v_{f,\delta} \bar{v}_{f,\alpha} = /(\text{I.4.9})/ = \\ &= /u_{i,\alpha} \bar{u}_{i,\beta} = (\rho_i)_{\alpha\beta}/ = \text{Tr}[A^\mu \rho_{-f} A^\nu \rho_f] = \\ &= \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \rho_{-f} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \rho_f]. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Нехай нас буде цікавити ширина розпаду Z -бозону як неполяризованої частинки на частинки в будь-якому стані поляризації. Провівши усереднення по поляризації Z -бозону (D4.1.17) та підсумувавши по поляризаціям кінцевих частинок (4.13), отримаємо

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} &= \sum_{\mu_f, \mu_{-f}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{3} |M_{fi}|^2 = \\ &= -B^2 \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \bar{\rho}_{-f} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \bar{\rho}_f] \frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) = \\ &= /\bar{\rho}_{qf} = q(m_f + q \not{p}_f)/ = \\ &= \frac{B^2}{3} \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f - \not{q}_f) \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f + \not{p}_f)] \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right), \quad (8.4) \end{aligned}$$

де 4-імпульс ферміона f ми позначили літерою p , а антиферміона — q . Ми опускаємо нижній індекс f поблизу імпульсу f -того ферміона для спрощення записів, однак маємо його на увазі.

Знайдемо значення виразу під знаком згортки

$$C^{\mu\nu} = \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f - \not{q}) \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f + \not{p})]. \quad (8.5)$$

Перемноживши доданки під знаком згортки та відкинувши ті, значення згортки від яких дорівнюють нулеві (див. Розділ 13), отримаємо

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu} &= \text{Tr} [m_f^2 ((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) \gamma^\mu \gamma^\nu - q_\alpha p_\beta ((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2) \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta - \\ &\quad - 2q_\alpha p_\beta g_v^f g_a^f \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] = \\ &= 4 [m_f^2 ((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) g^{\mu\nu} - ((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2) (q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p q + p^\mu q^\nu) + \\ &\quad + i 2q_\alpha p_\beta g_v^f g_a^f \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}]. \quad (8.6) \end{aligned}$$

Тоді

$$C^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4[4m_f^2((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) + 2pq((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2)], \quad (8.7)$$

$$C^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 4[m_f^2 k^2((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) - [2(pk)(qk) - k^2(pq)]((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2)],$$

де ми врахували, що згортка з останнім доданком в (8.6) дорівнює нулеві.

Справді, згортка антисиметричного тензора з метричним тензором дорівнює нулеві $\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} g_{\mu\nu} = 0$, бо метричний тензор має ненульові лише діагональні елементи, а елементи антисиметричного тензора, в якому хоча б два індекси співпадають, дорівнюють нулеві. Згортка з компонентами 4-імпульсу Z -бозону дорівнює нулеві з наступних міркувань

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} + k_\mu k_\nu \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} - k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}) = 0, \end{aligned} \quad (8.8)$$

де ми спочатку розбили вираз на два доданки і перепозначили в другому доданку німі змінні підсумовування $\mu \leftrightarrow \nu$, а потім переставили місцями в другому доданку індекси μ, ν використавши властивості антисиметричного тензора.

Згортки в (8.7) можна записати через маси частинок. З закону збереження енергії-імпульсу маємо $k = p + q$. Підвівши обидві частини до квадрату та врахувавши, що квадрати 4-імпульсів реальних частинок відповідають квадратам їх мас отримаємо $pq = M_Z^2/2 - m_f^2$. Аналогічно з рівностей $k - p = q$ та $k - q = p$ отримаємо $pk = qk = M_Z^2/2$:

$$C^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4[4m_f^2((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) + (M_Z^2 - 2m_f^2)((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2)], \quad (8.9)$$

$$C^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = -8m_f^2 M_Z^2 (g_a^f)^2,$$

Остаточно, вираз для амплітуди розсіяння (8.4) отримує вигляд:

$$|\overline{M_{fi}}|^2 = \frac{4B^2 M_Z^2}{3} \left[(g_v^f)^2 \left(1 + \frac{2m_f^2}{M_Z^2} \right) + (g_a^f)^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2} \right) \right], \quad (8.10)$$

а ймовірність розпаду (1.10) Z -бозону на дві частинки, одна з яких має імпульс \vec{p}_f та розповсюджується в напрямку, що знаходиться в межах тілесного кута $d\Omega_f$:

$$\begin{aligned}
d\Gamma_{f\bar{f}} &= \frac{1}{2^5\pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_f| d\Omega_f}{M_Z^2} = \\
&= \frac{B^2}{24\pi^2} \left[(g_v^f)^2 \left(1 + \frac{2m_f^2}{M_Z^2} \right) + (g_a^f)^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2} \right) \right] |\vec{p}_f| d\Omega_f, \quad (8.11)
\end{aligned}$$

де імпульс $|\vec{p}_f|$ знаходиться з закону збереження енергії в системі $M_Z^2 = (2E_f)^2 = 4m_f^2 + 4\vec{p}_f^2$ і дорівнює $|\vec{p}_f| = \frac{M_Z}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2}}$.

Повна ширина розпаду Z -бозону на пару $f\bar{f}$ отримується після інтегрування по тілесному куту:

$$\Gamma_{f\bar{f}} = \frac{\alpha M_Z}{3 \sin^2 2\theta_w} \left[(g_v^f)^2 \left(1 + \frac{2m_f^2}{M_Z^2} \right) + (g_a^f)^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2}}, \quad (8.12)$$

де ми використали, що $B = e/\sin 2\theta_w$ та $\alpha = e^2/4\pi$.

Повна ширина розпаду Z -бозону на всі можливі ферміонні пари є

$$\begin{aligned}
\Gamma = \sum \Gamma_{f\bar{f}} &= [\Gamma_{\nu_e\bar{\nu}_e} + \Gamma_{\nu_\mu\bar{\nu}_\mu} + \Gamma_{\nu_\tau\bar{\nu}_\tau}] + [\Gamma_{e\bar{e}} + \Gamma_{\mu\bar{\mu}} + \Gamma_{\tau\bar{\tau}}] + \\
&+ 3[\Gamma_{\nu_u\bar{\nu}_u} + \Gamma_{\nu_d\bar{\nu}_d} + \Gamma_{c\bar{c}} + \Gamma_{s\bar{s}} + \Gamma_{b\bar{b}}], \quad (8.13)
\end{aligned}$$

де коефіцієнт 3 перед вкладом від розпаду на кварк-антикваркові пари пов'язаний з тим, що розпад відбувається

Коефіцієнти g_v^f та g_a^f визначаються в СМ [3]:

$$g_v^f = t_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_w, \quad g_a^f = -t_3^f, \quad (8.14)$$

де $\sin^2 \theta_w = 0.231$; t_3^f — слабкий ізоспін, що дорівнює $+1/2$ для кварків (u, c, t) та нейтрино; $-1/2$ для кварків (d, s, b) та заряджених лептонів.

Відповідно,

$$\begin{aligned}
g_v^{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} &= 1/2; \quad g_v^{e, \mu, \tau} = -1/2 - 2(-1)0.231 = -0.038; \\
g_v^{d, s, b} &= -1/2 - 2(-1/3)0.231 = -0.346; \\
g_v^{u, c, t} &= 1/2 - 2(2/3)0.231 = 0.192; \\
g_a^{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} &= -1/2; \quad g_a^{e, \mu, \tau} = 1/2; \quad g_a^{d, s, b} = 1/2; \quad g_a^{u, c, t} = -1/2. \quad (8.15)
\end{aligned}$$

Зазначені частинки мають маси:

$$\begin{aligned} m_\nu &= 0; & m_e &= 5.11 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}; & m_\mu &= 0.106 \text{ GeV}; & m_\tau &= 1.78 \text{ GeV}; \\ m_u &= 0.003 \text{ GeV}; & m_d &= 0.006 \text{ GeV}; & m_c &= 1.3 \text{ GeV}; \\ m_s &= 0.1 \text{ GeV}; & m_b &= 4.3 \text{ GeV}; & M_Z &= 91.2 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Підставляючи (8.15), (8.16) в (8.13) отримаємо $\Gamma = 2.276 \text{ GeV}$. Відразу відмітимо, що підставивши в (8.13) нульові маси всіх частинок результат для повної ширини розпаду майже не зміниться. Експериментальне значення ширини розпаду [18] $\Gamma_{exp} = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}$, тобто час життя Z -бозону $\tau = 1/\Gamma_{exp} \simeq 0.4 \text{ GeV}^{-1} \simeq / (0.13) / \simeq 2.63 \cdot 10^{-25}$ сек.

Відмінність між отриманим нами результатом та даними експерименту пояснюється необхідністю врахування поправок від вищих порядків теорії збурень та врахуванням поправок квантової хромодинаміки (КХД), що враховують утворення ґадронів з кварків.

В цьому сенсі цікаво експериментальне значення ширини розпаду Z -бозону на пару заряджених лептонів (оскільки їх можна вважати безмасовими, то не має значення на які саме лептони відбувається розпад) $\Gamma_{ll,exp} = 83.984 \pm 0.086 \text{ MeV}$, а згідно (8.12) $\Gamma_{ll} = 78.492 \text{ MeV}$. Тобто, навіть без врахування поправок КХД, відмінність теоретичних та експериментальних значень становить близько 7%.

Відмітимо, що головний вклад в точність проведених розрахунків дає врахування зміни константи тонкої структури внаслідок поправок вищих порядків теорії збурень, а саме [18]: $\alpha^{-1} \rightarrow \alpha^{-1}(M_Z) = 127.922$. Використавши це значення отримаємо згідно (8.12), (8.13): $\Gamma = 2.438 \text{ GeV}$, $\Gamma_{ll} = 84.085 \text{ GeV}$. Як бачимо, в цьому випадку ми отримали майже ідеальне співпадання теоретичних розрахунків з експериментальним значенням для ширини розпаду Z -бозону на пару заряджених лептонів, однак співпадання для повної ширини розпаду не є гарним, що зумовлено, зокрема, необхідністю врахування поправок КХД для врахування утворення ґадронів.

Завдання

1. Отримайте вираз (8.6).
2. Знайдіть час життя Z -бозону, що знаходиться в стані з повздо-вжньою, поперечною поляризацією.

3. Розпад нерухомого Z -бозону на пару кварк-антикварк $t\bar{t}$ заборонений з енергетичних міркувань. Чи зміниться ситуація, якщо Z -бозон буде рухатися?
4. В даному розділі ми отримали вираз для часу життя Z -бозону у власній системі відліку. Яким буде час життя Z -бозону в інерційній системі відліку, в якій Z -бозон рухається зі швидкістю v ? Отримайте відповідь використовуючи загальні принципи спеціальної теорії відносності.

РОЗДІЛ 9

Розпад мюона

На відміну від електрона мюон є нестабільною частинкою. В даному розділі ми знайдемо час його життя в вільному стані в першому незникаючому наближенні.

З закону збереження лептонного числа випливає, що розпад мюона повинен відбуватися за схемою $\mu \rightarrow X + \nu_\mu$, де X — будь-яка одна частинка з нульовим лептонним числом (наприклад, гадрон) та електричним зарядом e , або декілька частинок (наприклад, лептон та відповідне лептонне антинейтрино) з сумарним нульовим лептонним числом та електричним зарядом e . Оскільки маса мюона становить лише $m_\mu = 106$ MeV, то розпади на гадрони слід відкинути (найлегший гадрон, π^- -мезон, має масу $m_\pi = 140$ MeV). Також слід відкинути розпад мюона на τ -лептон ($m_\tau = 1.78$ GeV). Отже, залишається лише варіант розпаду мюона на найлегший лептон — електрон ($m_e = 0.511$ MeV): $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Згідно лагранжіану СМ даний процес описується доданками (I.11.15), або наступною діаграмою Фейнмана:

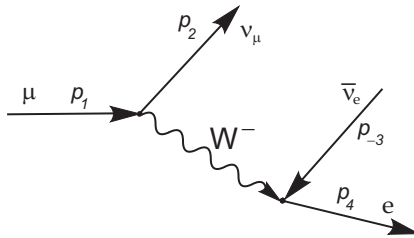


Рис. 0 Розпад мюона на електрон, електронне антинейтрино та мюонне нейтрино.

Наведеній діаграмі відповідає наступний вираз для \hat{S} -матриці в другому порядку теорії збурень (див. Розділ 11):

$$S_{fi}^{(2)} = -iA^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{2V \varepsilon_1 2V \varepsilon_2 2V \varepsilon_3 2V \varepsilon_4}} D_{\xi\chi}(p_1 - p_2) \times \\ \times \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}, \quad (9.1)$$

де $D_{\xi\chi}(k)$ відповідає пропагатору W -бозону (0.30), (D4.1.16), $A = e/(2\sqrt{2} \sin \theta_w)$ та ми використали очевидні позначення для функцій частинок. 4-імпульси мюона, мюонного нейтрино, електронного антинейтрино та електрона були позначені як p_1, p_2, p_3, p_4 відповідно.

Амплітуда процесу розпаду мюона, згідно означень (I.1.34), (I.1.40):

$$M_{fi} = -A^2 D_{\xi\chi}(p_1 - p_2) \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}. \quad (9.2)$$

Розглянемо розпад мюону в лабораторній системі відліку, тобто в системі, де він покоїться. Оскільки маса мюона набагато менша за масу W -бозону, то квадрат переданого імпульсу в пропагаторі W -бозону набагато менший за квадрат маси W -бозону: $(p_1 - p_2)^2 \ll M_W^2$. В цьому випадку, вираз для бозонного пропагатора спрощується до

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}}{M_W^2 - k^2 - i\epsilon} = /k^2 \ll M_W^2 / = \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}. \quad (9.3)$$

Тоді

$$M_{fi} = \frac{-e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta_w} \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma_\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}, \quad (9.4)$$

або, згадавши визначення постійної Фермі

$$G_F = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_w}, \quad (9.5)$$

отримаємо вираз для амплітуди розпаду мюона у вигляді¹:

$$M_{fi} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma_\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}. \quad (9.6)$$

¹Ми, фактично, зробили перехід до низькоенергетичної теорії слабких взаємодій – теорії Фермі (див. наприклад, [3]).

Для знаходження $|M_{fi}|^2$ використаємо (2.3), (2.4):

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \mu_1 \bar{e}_4 \gamma_\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3} \times \\ \times \bar{\mu}_1 \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \nu_{\mu,2} \bar{\nu}_{e,-3} \gamma_\chi (1 - \gamma^5) e_4. \quad (9.7)$$

Вважаючи комбінацію матриць $\gamma^\tau (1 - \gamma^5)$ як нову матрицю B^τ , легко побачити, що праву частину останнього виразу можна записати через добуток згорток:

$$(\bar{\nu}_{\mu,2})_\alpha (B^\xi)_{\alpha\beta} (\mu_1)_\beta (\bar{e}_4)_\delta (B_\xi)_{\delta\epsilon} (\nu_{e,-3})_\epsilon (\bar{\mu}_1)_\zeta (B^\chi)_{\zeta\eta} (\nu_{\mu,2})_\eta (\bar{\nu}_{e,-3})_\kappa (B_\chi)_{\kappa\lambda} (e_4)_\lambda = \\ = [(B^\xi)_{\alpha\beta} (\mu_1)_\beta (\bar{\mu}_1)_\zeta (B^\chi)_{\zeta\eta} (\nu_{\mu,2})_\eta (\bar{\nu}_{\mu,2})_\alpha] [(B_\xi)_{\delta\epsilon} (\nu_{e,-3})_\epsilon (\bar{\nu}_{e,-3})_\kappa (B_\chi)_{\kappa\lambda} (e_4)_\lambda (\bar{e}_4)_\delta] \\ = Tr[B^\xi \mu_1 \bar{\mu}_1 B^\chi \nu_{\mu,2} \bar{\nu}_{\mu,2}] \cdot Tr[B_\xi \nu_{e,-3} \bar{\nu}_{e,-3} B_\chi e_4 \bar{e}_4]. \quad (9.8)$$

Тоді, використавши (I.4.9), вираз (9.7) можна представити як:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{2} Tr[\gamma^\xi (1 - \gamma^5) \rho_\mu \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \rho_{\nu_\mu}] \times \\ \times Tr[\gamma_\xi (1 - \gamma^5) \rho_{-\nu_e} \gamma_\chi (1 - \gamma^5) \rho_e]. \quad (9.9)$$

Надалі ми будемо розглядати розпад неполяризованого мюона на частинки з усіма можливими поляризаційними станами. Тобто нам потрібно усереднити по поляризаційним станам мюона та підсумувати по поляризаційним станам інших частинок¹:

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_\mu=1}^2 \sum_{\lambda_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu=1}^2 |M_{fi}|^2 = / (4.13) / = \\ = \frac{G_F^2}{4} Tr[\gamma^\xi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_\mu \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_{\nu_\mu}] Tr[\gamma_\xi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_{-\nu_e} \gamma_\chi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_e] = \\ = \frac{G_F^2}{4} Tr[\gamma^\xi (1 - \gamma^5) (m_\mu + \not{p}_1) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \not{p}_2] \times \\ \times Tr[\gamma_\xi (1 - \gamma^5) \not{p}_3 \gamma_\chi (1 - \gamma^5) (m_e + \not{p}_4)]. \quad (9.10)$$

¹Ми проводимо підсумовування по двом спіральним станам нейтрино незважаючи на те, що в СМ нейтрино мають лише лівий спіральний стан. Правий спіральний стан не дасть вкладу в амплітуду реакції за рахунок множника $(1 - \gamma^5)$.

Аналогічно до (8.5), отримуємо:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\xi(1-\gamma^5)(m_\mu + \gamma^\alpha p_{1,\alpha})\gamma^\chi(1-\gamma^5)\gamma^\beta p_{2,\beta}] &= \\ &= 2p_{1,\alpha}p_{2,\beta}(Tr[\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\chi\gamma^\beta] + Tr[\gamma^5\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\chi\gamma^\beta]) = \\ &= 8[p_1^\xi p_2^\chi - g^{\xi\chi}(p_1 p_2) + p_1^\chi p_2^\xi - i\epsilon^{\xi\alpha\chi\beta} p_{1,\alpha} p_{2,\beta}], \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\xi(1-\gamma^5)\not{p}_3\gamma_\chi(1-\gamma^5)(m_e + \not{p}_4)] &= \\ &= 8[p_{3,\xi}p_{4,\chi} - g_{\xi\chi}(p_3 p_4) + p_{3,\chi}p_{4,\xi} - i\epsilon_{\xi\alpha\chi\beta} p_3^\alpha p_4^\beta]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Відмітимо, що ці вирази були розраховані точно і в них не ввійшли масові доданки.

Підставивши (9.11), (9.12) у вираз для амплітуди реакції (9.10) отримаємо:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = 64G_F^2(p_1 p_3)(p_2 p_4), \quad (9.13)$$

де ми використали співвідношення $\epsilon^{\xi\chi\alpha\beta}\epsilon_{\xi\chi\kappa\lambda} = -2(\delta_\kappa^\alpha\delta_\lambda^\beta - \delta_\lambda^\alpha\delta_\kappa^\beta)$ [7] та врахували, що

$$\epsilon_{\xi\alpha\chi\beta}(p^{1,\xi}p^{2,\chi} + p^{1,\chi}p^{2,\xi})p^{3,\alpha}p^{4,\beta} = 0$$

за рахунок антисиметричності тензора

Вираз для ширини розпаду мюона отримаємо за допомогою (I.1.43). В нашому випадку $N_i = 1$, $N_f = 3$, тоді ймовірність переходу системи з початкового стану i в кінцевий стан f за одиницю часу дорівнюватиме:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = G_F^2 \frac{\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)}{2^3 \pi^5} \frac{(p_1 p_3)(p_2 p_4)}{E_1 E_2 E_3 E_4} d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4. \quad (9.14)$$

Для отримання ширини розпаду потрібно виконати інтегрування. Оскільки маса мюона набагато більша за масу електрона, то, для спрощення розрахунків, в подальшому будемо вважати $m_e = 0$.

Для початку виконаємо інтегрування по імпульсам нейтрино, а саме потрібно взяти наступний інтеграл:

$$\int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{p_{2,\alpha} p_{3,\beta}}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) = I_{\alpha\beta}. \quad (9.15)$$

Очевидно, що тензор $I_{\alpha\beta}$ повинен мати розмірність квадрата енергії. Його можна виразити через два 4-імпульси, що залишаються p_1, p_4 .

Зокрема, тензор $I_{\alpha\beta}$ можна представити у вигляді суми двох ортогональних доданків:

$$I_{\alpha\beta} = A[q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta] + B[q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta], \quad (9.16)$$

де $q = p_1 - p_4$. Справді, як неважко переконатися:

$$\begin{aligned} [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta][q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] &= 0; \\ [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta][q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta] &= 12q^4; \\ [q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta][q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] &= 4q^4. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Для знаходження коефіцієнтів розкладу A, B домножимо (9.15) на ортогональні доданки:

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] = \int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{q^2(p_2 p_3) - 2(p_2 q)(p_3 q)}{E_2 E_3} \delta^4(q - p_2 - p_3); \quad (9.18)$$

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] = \int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{q^2(p_2 p_3) - 2(p_2 q)(p_3 q)}{E_2 E_3} \delta^4(q - p_2 - p_3).$$

З закону збереження енергії імпульсу маємо $q = p_1 - p_4 = p_2 + p_3$, відповідно $q^2 = 2(p_2 p_3)$ та $(p_2 q) = (p_3 q) = (p_2 p_3)$, де ми врахували безмасовість нейтрино ($p_2^2 = p_3^2 = 0$). Отже

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] = 4q^4 B = 0, \quad \text{відповідно} \quad B = 0, \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] &= 12q^4 A = \\ &= q^4 \int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{1}{E_2 E_3} \delta^4(q - p_2 - p_3). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Для знаходження останнього інтегралу виконаємо інтегрування по $d^3 \vec{p}_3$: отримаємо рівність $\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Підвівши до квадрату рівності $q - p_1 = p_2$ та $q - p_2 = p_1$ отримаємо $(qp_1) = (qp_2) = q^2/2 \neq 0$, з чого випливає $(\vec{q} \cdot \vec{p}_1) = (\vec{q} \cdot \vec{p}_2)$. Можна показати, що модулі імпульсів нейтрино будуть однаковими, а також однаковими будуть кути між ними та вектором \vec{q} . Отже розподіл імпульсів при розпаді мюона буде таким, як представлено на Рис. 20.2.

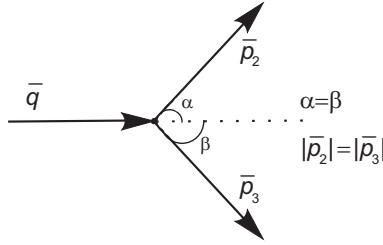


Рис. 0 Розподіл імпульсів між частинками при розпаді мюона.

Оскільки модулі імпульсів нейтрино однакові, то однаковими будуть і енергії нейтрино, тоді

$$A = \frac{1}{12} \int d^3 \vec{p}_2 \frac{1}{E_3 E_3} \delta(q_0 - 2E_3) = /E_3 = |\vec{p}_3|, \quad d^3 \vec{p}_2 = |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| d\Omega / = \\ = \frac{1}{12} \int E_3^2 dE_3 \int d\Omega \frac{1}{E_3 E_3} \frac{\delta(E_3 - q_0/2)}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad (9.21)$$

де дельта-функція від функції $f(x)$ розписується стандартним чином через суму по кореням функції $f(x)$: $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - x_i) / |f'(x_i)|$.

Таким чином ми отримали

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6} [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta]. \quad (9.22)$$

Підставивши цей результат в (9.14) отримаємо диференційну ширину розпаду неполяризованого мюона:

$$d\Gamma_\mu = G_F^2 \frac{1}{2^3 6 \pi^4} \frac{p_1^\beta p_4^\alpha [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta]}{E_1 E_4} d^3 \vec{p}_4 = \\ = G_F^2 \frac{1}{2^3 6 \pi^4} \frac{q^2 (p_1 p_4) + 2(p_1 q)(p_4 q)}{E_1 E_4} d^3 \vec{p}_4. \quad (9.23)$$

Скалярні добутки в останньому виразі легко отримуються згадавши, що $q = p_1 - p_4$: $q^2 = m_\mu^2 - 2(p_1 p_4)$; $(p_1 q) = m_\mu^2 - (p_1 p_4)$; $(p_4 q) = (p_1 p_4)$. В системі відліку, де мюон покоїться $p_1 = (m_\mu, \vec{0})$, відповідно $q^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu E_4$; $(p_1 q) = m_\mu^2 - m_\mu E_4$; $(p_4 q) = m_\mu E_4$. Отже, вираз в чисельнику (9.27):

$$q^2 (p_1 p_4) + 2(p_1 q)(p_4 q) = 3m_\mu^3 E_4 - 4m_\mu^2 E_4^2. \quad (9.24)$$

Оскільки $E_4 = |\vec{p}_4|$, то $d^3\vec{p}_4 = |\vec{p}_4|^2 d|\vec{p}_4| d\Omega = E_4^2 dE_4 d\Omega$. В результаті, вираз для диференційної ширини розпаду неполяризованого мюона, проінтегрований по тілесному куту, дорівнює

$$d\Gamma_\mu = G_F^2 \frac{4\pi}{2^3 6\pi^4} [3m_\mu^2 E_4^2 - 4m_\mu E_4^3] dE_4. \quad (9.25)$$

Знайдемо діапазон, в якому може знаходитись енергія електрона. Нижня границя відповідатиме випадку, коли кут $\alpha = \pi/2$, див. Рис. 20.2. В цьому випадку $|\vec{q}| = |\vec{p}_4| = 0$, тобто $E_{4,min} = 0$. Верхня границя відповідатиме випадку, коли кут $\alpha = 0$. Тоді $|\vec{q}| = |\vec{p}_4| = 2|\vec{p}_3|$, тобто $E_4 = 2E_2$. В цьому випадку з закону збереження енергії $m_\mu = E_4 + 2E_2 = 2E_4$ впливає $E_{4,max} = m_\mu/2$.

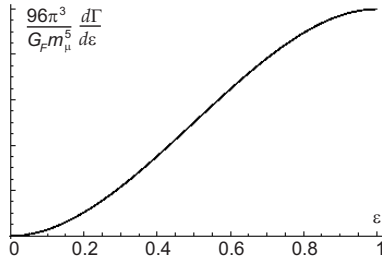


Рис. 0 Диференційна ширина розпаду неполяризованого мюона, як функція параметру $\varepsilon = 2E_4/m_\mu$ (обезрозміреної енергії електрона).

В якості безрозмірного параметру вводять відношення енергії електрона до її максимально можливого значення $\varepsilon = 2E_4/m_\mu$:

$$\frac{d\Gamma_\mu}{d\varepsilon} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} [3 - 2\varepsilon]\varepsilon^2. \quad (9.26)$$

Як видно з Рис. 20.3 при розпаді неполяризованого мюона може вилетіти електрон з довільною енергією в діапазоні $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Максимум розподілу приходить на електрони з максимально можливою енергією $\varepsilon = 1$.

Повна ширина розпаду неполяризованого мюона дорівнює

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} \int_0^1 d\varepsilon \varepsilon^2 [3 - 2\varepsilon] = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \quad (9.27)$$

Підставивши значення постійної Фермі $G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ [18] та маси мюона $m_\mu = 0.106 \text{ GeV}$ отримаємо ширину розпаду $\Gamma_\mu = 3.056 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}$ та, відповідно, час життя неполяризованого мюона (0.13) $\tau_\mu = 1/\Gamma_\mu = (0.13) = 2.154 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$ Експериментальне значення часу життя неполяризованого мюона $\tau_\mu = 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$

Відмітимо, що експериментально значення константи Фермі знаходиться саме з часу життя мюона. Неспівпадання нами розрахованого часу життя з експериментальними даними пояснюється необхідністю врахування радіаційних поправок.

Завдання

1. Отримайте вирази (9.11) – (9.13).
2. Перевірте розмірність ширини розпаду в (9.27).
3. Знайдіть час життя для мюона з лівою, правою спіральністю.
4. В даному розділі ми отримали вираз для часу життя неполяризованого мюона у власній системі відліку. Яким буде час життя неполяризованого мюона в інерційній системі відліку, в якій мюон рухається зі швидкістю v ? Отримайте відповідь використовуючи загальні принципи спеціальної теорії відносності.
5. Використовуючи (I.11.15), (I.11.29) доведіть, що процеси нейтринного розсіяння при невисоких енергіях ($p^2 \ll M_{Z,W}^2$, де p – переданий імпульс) описуються точковими чотириферміонними діаграмами та наступними ефективними лагранжіанами:

$$\mathcal{L}^W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{n=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n \cdot \bar{e}_n \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_n, \quad (9.28)$$

$$\mathcal{L}^Z = -\sqrt{2} G_F \sum_f \bar{f} \gamma^\mu A_f \cdot \sum_{n=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_n \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_n. \quad (9.29)$$

Врахуйте, що $M_W = M_Z \cos \theta_w$.

6. Використовуючи результат попередньої задачі знайдіть відношення перерізів розсіяння різних типів нейтрино на електроні $\sigma_{e\nu_e \rightarrow e\nu_e} / \sigma_{e\nu_\mu \rightarrow e\nu_\mu}$ та $\sigma_{e\nu_e \rightarrow e\nu_e} / \sigma_{e\nu_\tau \rightarrow e\nu_\tau}$ при низьких енергіях частинки.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.-432 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.-480 с.
3. *Горбунов Д.С., Рубаков В.А.* Введение в теорию ранней вселенной. М.: Издательство ИЯИ РАН, 2007.-458 с.
4. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля в 2 т., Т. I. М.: Мир, 1984.-448 с.
5. *Блум К.* Теория матрицы плотности и ее приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. – 248 с.
6. *Ландау Л.Д , Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика в 10 т., Т. I Класична механика. М.: Физматлит, 1988.-216 с.
7. *Ландау Л.Д , Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика в 10 т., Т. II Теория поля. М.: Физматлит, 1988.-512 с.
8. *Ландау Л.Д , Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика в 10 т., Т. III Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 1989.-768 с.
9. *Ландау Л.Д , Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика в 10 т., Т. IV Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 1989.-728 с.
10. *Наумов Д.В.* Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов. Дубна: Лаборатория Ядерных проблем ОИЯИ, 2008.-93 с.
11. *Ожунь Л.Б.* Лептоны и кварки. М.: Физматлит, 1990.-346 с.
12. *Ожунь Л.Б.* Слабое взаимодействие элементарных частиц. М.: Физматлит, 1963.-248 с.
13. *Пескин М.Е., Шрёдер Д.В.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001.-784 с.

14. *Ребенко О.Л.* Основи сучасної теорії взаємодіючих квантованих полів. К.:Наукова думка, 2007.-538 с.
15. *Ситенко О.Г.* Теорія розсіяння. К.: Либідь, 1993.-332 с.
16. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд. Ин. Лит., 1963.-842 с.
17. American Super-K, <http://neutrino.phys.washington.edu/~superk/>
18. Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>
19. *Bilenky S. and Petcov S.* Massive neutrinos and neutrino oscillations, *Rew. Mod. Phys.* **59**, No. 3, Part 1 1987.
20. *Greiner W. and Reinhardt J.* Quantum electrodynamics. Springer, 2003.-475 pp.
21. *Greiner W. and Reinhardt J.* Field quantization. Springer, 1996.-442 pp.